解答例

# STEP II 2013、第 11 問

力学 ・ 繰り返される衝突

**STEP II 2013、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

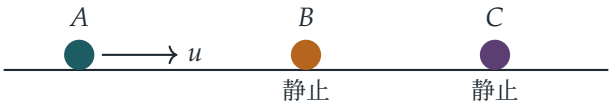
step.maths.org/questions/13-s2-q11

## 鍵となる考え方

この問題の衝突はすべて等しい質量どうしの衝突なので、どの衝突も同じ小さな計算、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）の組合せで処理できる。一度一般的に計算しておき、それを使い回せばよい。さらに衝突が起こるかどうかは、後ろの粒子が前の粒子より速く動いているかどうかという問題にすぎないので、問題全体は速度の比較に帰着する。

## 解答

粒子を、なめらかな面上にある質量 $m$ の同一の粒子としてモデル化する。したがって衝突と衝突の間には水平方向の力ははたらかず、各粒子は等速度で運動する。直線上に並んだ順に $A$、$B$、$C$ とし、$A$ を $B$ と $C$ の方へ打ち出される粒子とする。$A$ のはじめの運動の向きを正の向きとする。




### 一般の衝突

速度 $p$ の粒子が、その前方にある速度 $q < p$ の同一の粒子に追いつき、衝突後の速度がそれぞれ $p'$、$q'$ になったとする。運動量保存（$m$ を約す）と反発の法則から

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

これらを足したり引いたりして

$$p' = \tfrac{1}{2}[(p+q) - e(p-q)], \qquad q' = \tfrac{1}{2}[(p+q) + e(p-q)]. \tag{$*$}$$

$e > 0$ かつ $p > q$ であるから、つねに $q' > p'$ となる。つまり衝突後は前の粒子のほうが後ろの粒子より速く動くので、他の何かがどちらかの速度を変えない限り、その 2 つが再び出会うことはない。

**小問 (i)**

**1 回目の衝突**（$A$ が $B$ に衝突）：$(*)$ に $p = u$、$q = 0$ を代入して

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

ここで $v_B > v_A$ なので $A$ は $B$ に追いつけない。しかし $B$ は静止している $C$ に向かって動くので、2 回目の衝突は $B$ と $C$ の衝突である。

**2 回目の衝突**（$B$ が $C$ に衝突）：$p = \frac{1}{2}u(1+e)$、$q = 0$ を代入して

$$v_B = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

$A$ には何も起きていないので、依然として $v_A = \frac{1}{2}u(1-e)$ である。3 つの速度はすべて正である（$0 < e < 1$ より）から、速さはそれぞれ $\frac{1}{2}u(1-e)$、$\frac{1}{4}u(1-e^2)$、$\frac{1}{4}u(1+e)^2$ となり、示すべきことが示された。

**3 回目の衝突**。$(*)$ より $C$ は $B$ より速いので、$B$ と $C$ は離れていく。次に起こりうる衝突は $A$ が $B$ に追いつくものだけであり、それが起こるのはちょうど $v_A > v_B$ のときである：

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2-(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

これは $e \neq 1$ による。よって $A$ は $B$ の後ろにあって $B$ より速く動いており、$0 < e < 1$ のすべての $e$ に対して 3 回目の衝突（$A$ と $B$）が起こる。

**小問 (ii)**

**3 回目の衝突**（$A$ が $B$ に衝突）：ここでは $p = \frac{1}{2}u(1-e)$、$q = \frac{1}{4}u(1-e^2)$ であるから

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2+(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

$(*)$ より、$B$ の新しい速度は

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e+e-e^2] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

であり、（念のため）$v_A = \frac{1}{8}u(1-e)[3+e-e(1-e)] = \frac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$ で、これは $v_B$ より小さい。

**考えてみよう** 3回目の衝突の後、再び衝突する可能性があるのはどの組か。

$A$ と $B$ はちょうど衝突したところなので、$(*)$ より $B$ のほうが $A$ より速く、2つは離れていく。$C$ は依然として $\frac{1}{4}u(1+e)^2$ で動いており、$C$ の先には何もない。したがって4回目の衝突が起こるのは $B$ が $C$ に追いつくとき、かつそのときに限る。すなわち $v_B > v_C$ のとき、かつそのときに限る。$\frac{1}{8}u(1+e) > 0$ で割ると

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e) > \frac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e) > 2(1+e)\\ &\iff e^2 - 6e + 1 > 0.\end{aligned}$$

2次式 $e^2-6e+1$ の根は $e = 3 \pm 2\sqrt{2}$ であり、この式は2根の外側で正である。大きいほうの根 $3+2\sqrt{2}$ は1を超え、一方 $3-2\sqrt{2} \approx 0.172$ は $(0,1)$ に含まれる。よって $0 < e < 1$ のとき

$$4\text{回目の衝突が起こる} \iff e < 3-2\sqrt{2}.$$

ちょうど $e = 3-2\sqrt{2}$ のときは、$B$ と $C$ は等しい速度で動き、決して出会わないので、不等号は等号を含まない。

## 検算

- 運動量：2回目の衝突の後の合計は $\frac{1}{4}u\left[2(1-e)+(1-e^2)+(1+e)^2\right] = \frac{1}{4}u \cdot 4 = u$ であり、当然そうなるべき値になっている。
- 極限の場合：$e \to 1$ のとき、2回の衝突後の速度は0、0、$u$ に近づき（おなじみの「ニュートンのゆりかご」型の速度の受け渡し）、$v_A - v_B \to 0$ となるので、3回目の衝突はぎりぎりで起こる。臨界値 $3-2\sqrt{2}$ が1よりかなり小さいことは、これと整合している。
- 数値で確かめると、$e = 0.1$ のとき3回目の衝突後の速度は $v_B \approx 0.3589u$、$v_C = 0.3025u$ なので、$B$ は確かに $C$ に追いつく。$e = 0.2$ のときは $v_B = 0.336u < v_C = 0.36u$ で、追いつかない。運動のコンピュータ・シミュレーションでも、$e > 0.1716$ のすべての $e$ でちょうど3回、それより小さい $e$ では少なくとも4回の衝突が起こることが確認された。

## よくある間違い

- 次に衝突するのがどの組かの根拠を示し忘れる。毎回、直前に衝突した2つの粒子が離れていくこと、そして残りの組が近づいていることを確認すること。

- 反発の法則の符号を間違える。法則は（遠ざかる速さ）$= e\times$（近づく速さ）であり、したがって $q' - p' = e(p - q)$ で、左辺では前の粒子の速度が先にくる。
- 許される範囲 $0 < e < 1$ の外にある根 $3 + 2\sqrt{2}$ を残してしまう。

## STEP のその先へ

規則 $(*)$ は衝突前の速度の組を衝突後の速度の組に移す線形写像（linear map）であり、したがって一連の衝突は行列（matrix）の積になる。衝突が全部で何回起こるかを問うのは古典的な問題であり、弾性的なビリヤード球の系に対しては、運動をくさび形領域内の直線へと「展開」することによる美しい幾何的な答えがある。衝突、運動量、座標系（frames of reference）を大学レベルの丁寧さで扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。