解答例

STEP II 2013、第 10 問

力学 ・ 放物運動

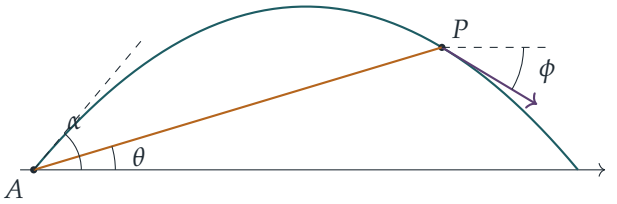
STEP II 2013、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q10

鍵となる考え方

時刻 t における位置と速度（velocity）を書き下すと、$\tan\theta$ と $\tan\phi$ がどちらも t の**一次式**になることがわかる。(i) の恒等式はそこからただちに得られ、これによって B と C はどちらも角の正接（tangent）に関する条件に言い換えられる。どちらの角も時間とともに一様に減少するので、「どちらが先か」は二つの数の比較にすぎず、(i) を使えばその比較を一点 B だけで行うことができる。



一般の点 P において、θ は A から見た P の仰角（angle of elevation）であり、ϕ は速度が水平方向となす角である（粒子は落下しているので、図では負である）。

解答

粒子は空気抵抗（air resistance）なしに重力加速度 g のもとで自由に運動するものとしてモデル化する。時刻 $t = 0$ に速さ u で投射されたとし、$0 < \alpha < 90°$ とする。A を原点にとると、時刻 t において

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

粒子が着地するのは再び $y = 0$ となるとき、すなわち $t = 2u\sin\alpha/g$ のときである。

小問 (i)

$t > 0$ に対して、A から見た粒子の仰角は

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

を満たし、運動の向きは

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

を満たす。一つ目を 2 倍し、二つ目を用いると

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

となり、示すべき式が得られた。

後で使うことを記録しておく価値がある。$k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$ とおくと

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

であるから、$\tan\theta$ と $\tan\phi$ はどちらも時間の経過とともに狭義単調減少（strictly decreasing）する。飛行中に θ は α から 0 まで減少し、ϕ は α から $-\alpha$ まで減少するので、$\theta = \frac{1}{2}\alpha$ と $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$ はそれぞれちょうど一度だけ起こる。したがって B と C はきちんと定まる。

小問 (ii)

$T = \tan\frac{1}{2}\alpha$ とおく。$0 < \frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$ であるから $0 < T < 1$ である。B では $\tan\theta = T$ である。C では $\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$ である。B と C が同じ点ならば、そこで両方が成り立つので、(i) より

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

倍角の公式（double-angle formula）より $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$ であるから

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

となる。ここで T で割ったが、$T > 0$ なのでこれは許される。正の根をとると $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、$\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$ となり

$$\alpha = 60^\circ.$$

小問 (iii)

考えてみよう 二つの時刻を計算せずに、どちらの点に先に到達するかをどうすれば判定できるだろうか。

$(*)$ より、ϕ は飛行中ずっと減少する。したがって C が B より後になるのは、粒子が B にある瞬間に ϕ がまだ $-\frac{1}{2}\alpha$ まで下がっていないとき、すなわち $\tan\phi_B > -T$ のとき、かつそのときに限る。ここで ϕ_B は B における運動の向きである。

B において、小問 (i) より $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$ である。よって

$$B \text{ に先に到達する} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

再び $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$ を用い、$T > 0$ で割り、$1 - T^2 > 0$ を掛ける（これらは不等号の向きを変えない）と

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \frac{1}{3} \iff \frac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

となる。最後の段階は tan が $(0^\circ, 45^\circ)$ で増加することによる。どの段階も逆にたどれるので

$$\alpha < 60^\circ \iff B \text{ に } C \text{ より先に到達する.}$$

したがって、$\alpha < 60^\circ$ のとき粒子は先に B に到達する。

時刻を明示的に求めたいなら、$(*)$ より $kt_B = 2(\tan\alpha - T)$、$kt_C = \tan\alpha + T$ であり、$t_B < t_C$ はやはり $\tan\alpha < 3T$ と同値である。

検算

- $t = 0$ では $(*)$ の二つの式はどちらも $\tan\alpha$ を与え、当然そうあるべきである。投射直後、粒子は投射の方向の直線に沿って運動しているからである。着地時には $kt = 2\tan\alpha$ となり、$\tan\theta = 0$ と $\tan\phi = -\tan\alpha$ が得られる。これはおなじみの軌道（trajectory）の対称性である。
- $\alpha = 60^\circ$ のとき $\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$ であり、(ii) と矛盾しない。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\alpha = 45^\circ$ とすると、公式から $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$、$t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$ となるので、B が先である。コンピュータで運動を数値的に追跡しても同じ時刻が得られ、さらに $\alpha = 61^\circ$、75°、85° では C が先になることも確かめられる。

よくある間違い

- θ（A から見た粒子の方向）を ϕ（粒子の速度の方向）と取り違える。両者が一致するのは投射の瞬間だけである。

- C での符号を誤る。そこでは $\tan\phi = -\tan\frac{1}{2}\alpha$ であり、$+\tan\frac{1}{2}\alpha$ ではない。
- (iii) で、「$\tan\phi_B > -T$」がなぜ B が先であることを意味するのかを述べずに答えを主張する。それを正当化するのは ϕ の単調減少（monotonic decrease）である。

STEP のその先へ

(i) の恒等式は、A から放物線（parabola）上の任意の点への弦（chord）の傾きが、その両端における接線の傾きの平均に等しいことを述べている。これは二次関数に特有の性質である（中点がちょうど特定された平均値の定理（mean value theorem）にあたる）。大学 1 年の力学の講義では、斜面（inclined plane）上の放物運動を学ぶ際に同じ考え方に出会うだろう。そこでは投射点からの直線の角が、ここでの θ とまったく同じ役割を果たす。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動の問題がこのように丁寧に扱われている様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。