解答例

STEP II 2013、第 1 問

純粋数学 • 対数関数の弦

> **STEP II 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.5 節「π^e か e^π か？」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/pi-e-or-e-pi.html

鍵となる考え方

ここで扱う不等式はどれも、p^q と q^p の比較である。対数（logarithm）をとって pq で割れば、これは $\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ の比較になる。そして $\frac{\ln x}{x}$ は、原点と曲線上の点 $(x, \ln x)$ を結ぶ直線の傾き（gradient）である。したがって、すべては $y = \ln x$ と交わる直線や弦の問題に帰着する。必要な事実は、この曲線が上に凸（concave、下向きに曲がっている）であることと、原点から引いた接線が $x = \mathrm{e}$ で曲線に接することである。

解答

小問 (i)

$y = mx$ が $y = \ln x$ に $x = x_0$ で接するとする。傾きが一致し、かつ 2 曲線が交わるから、

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

第 1 式より $mx_0 = 1$ であるから、$\ln x_0 = 1$、$x_0 = \mathrm{e}$ であり、

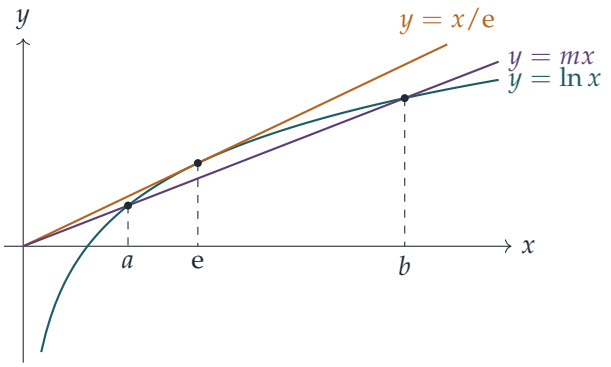
$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

次に、$y = mx$ が曲線と $x = a$ および $x = b$ で交わるとする。このとき $\ln a = ma$ かつ

$\ln b = mb$ であるから、（$a, b > 0$ より）

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b\ln a = a\ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a),$$

となる。ln は単射（one-to-one）であるから、$a^b = b^a$ が成り立ち、示すべきことが示された。



図の概形について述べる。$m \le 0$ ならば $\ln x - mx$ は狭義単調増加であるから、直線と曲線は高々 1 回しか交わらない。$m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$ ならば、$x > 0$ において直線は接線そのものであるかその上側にあり、上に凸な曲線は接線 $y = x/\mathrm{e}$ の下側にあって e でのみ接するから、やはり交点は 2 つにならない。よって $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$ であり、図のように直線 $y = mx$ は接線の下側にある。$x = \mathrm{e}$ において曲線の高さは 1、直線の高さは $m\mathrm{e} < 1$ であるから、そこでは曲線が直線の上側にある。曲線は上に凸で直線はまっすぐであるから、$\ln x - mx$ は上に凸である。したがって、これが正となる範囲はひとつの区間であり、その両端が 2 つの交点 a と b である。この区間は e を含むから、$a < \mathrm{e} < b$ である。

小問 (ii)

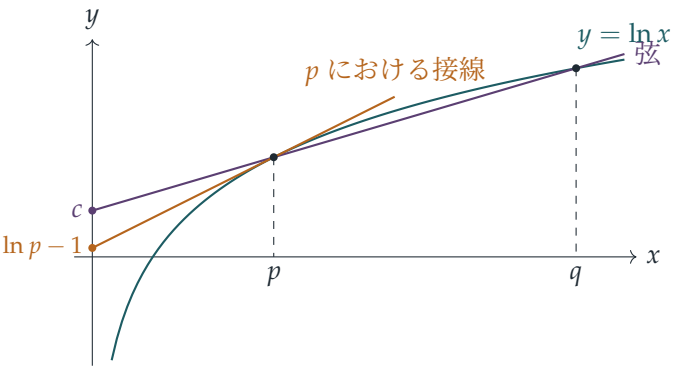
ここでは $0 < p < q$ として $\ln p = mp + c$、$\ln q = mq + c$ である。それぞれ p と q で割ると、

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$ かつ $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ であるから $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ を得る。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q\ln p > p\ln q$、すなわち $\ln(p^q) > \ln(q^p)$ となり、したがって $p^q > q^p$ である。

図で見ると、原点から $(p, \ln p)$ および $(q, \ln q)$ へ引いた直線の傾きはそれぞれ $\frac{\ln p}{p}$ と $\frac{\ln q}{q}$ である。弦（chord）が原点より上で y 軸と交わるならば、近いほうの点へ O から引いた直線のほうが傾きが急になる。（c の符号によって不等式の向きが決まる。このことは小問 (iv) で再び用いる。）

小問 (iii)



$P = (p, \ln p)$ と $Q = (q, \ln q)$ を通る弦の傾きを s、y 切片（intercept）を c とすると、$c = \ln p - sp$ である。曲線は上に凸であるから、P からそれより右の点へ引いた弦は、P における接線（tangent）よりも傾きが緩やかである。よって

$$s < \frac{1}{p}.$$

（あるいは平均値の定理（mean value theorem）により、ある $\xi \in (p, q)$ に対して $s = \frac{1}{\xi}$ であり、$\frac{1}{\xi} < \frac{1}{p}$ である。）P における接線は $y = \ln p + \frac{1}{p}(x - p)$ であり、これは y 軸と $\ln p - 1$ で交わる。弦と接線はともに P を通り、弦のほうが傾きが緩やかである。したがって、P から左へ $x = 0$ まで進むと、弦は接線より上側にある：

$$c = \ln p - sp > \ln p - 1 \geq 0,$$

ここで最後の段階では $p \geq \mathrm{e}$ を用いた。よって、弦は y 軸と正の y の値で交わる。

考えてみよう このことから、π^{e} と e^{π} の大小はどう決まるか？

$p = \mathrm{e}$、$q = \pi$ とすると、これらは $\mathrm{e} \leq p < q$ を満たす。弦は $c > 0$ を満たすから、小問 (ii) が適用でき、$p^q > q^p$ すなわち

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

小問 (iv)

今度は $(p, \ln p)$ と $(q, \ln q)$ を通る弦の傾きが $\frac{1}{\mathrm{e}}$ であるから、弦は $y = \frac{x}{\mathrm{e}} + c$ であり、

$$c = \ln p - \frac{p}{\mathrm{e}}.$$

直線 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ は小問 (i) で求めた $x = \mathrm{e}$ における接線であり、上に凸な曲線はその上または下側にある：$\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$ であり、等号は $x = \mathrm{e}$ のときに限る。よって $c \leq 0$ であり、

$c = 0$ となるのは $p = \mathrm{e}$ のときに限る。しかし $c = 0$ ならば弦は接線そのものとなり、接線は曲線と e でしか交わらないから、2 点 $p < q$ で交わることはない。したがって

$$c < 0.$$

弦は接線に平行で、その下側にある。ここで、符号を逆にして小問 (ii) の議論を繰り返す：

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

$c < 0$ かつ $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ であるから $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$ となり、$\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$ を得る。両辺に $pq > 0$ を掛けると $q \ln p < p \ln q$ となり、したがって

$$q^p > p^q.$$

（小問 (i) と同様に、ここでも上に凸であることから $p < \mathrm{e} < q$ が従うが、この議論にはそれは必要ない。）

検算

- $\mathrm{e}^\pi \approx 23.14$、$\pi^\mathrm{e} \approx 22.46$ であり、小問 (iii) と矛盾しない。
- 小問 (i)：組 $a = 2$、$b = 4$ は $2^4 = 4^2$ を満たし、実際 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ かつ $2 < \mathrm{e} < 4$ である。
- 小問 (iv)：$p = 1$ とすると、弦の傾きの条件 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ より $q \approx 5.76$ である。このとき $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$ となる。
- 小問 (ii) と (iii) は、多数のランダムな弦についてコンピュータで確かめることでも確認した。

よくある間違い

- $q \ln p > p \ln q$ の向きを逆にしてしまう。pq を掛ける前に、$\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$ をはっきり書き出すこと。
- 小問 (iii) で、切片が正である理由を説明せずに「曲線は上に凸である」で止めてしまう。p における接線は軸と $\ln p - 1 \geq 0$ で交わり、弦はその上側で軸と交わる。
- 小問 (iv) で、$c = 0$ の場合を除外し忘れる。これは狭義の不等式を得るために必要である。

STEP のその先へ

関数 $\frac{\ln x}{x}$ は e で最大値をとり、これが有名な組 $2^4 = 4^2$ の説明となる。$x \neq y$ である $x^y = y^x$ の正の解は 1 本の曲線をなし、$x = t^{1/(t-1)}$、$y = t^{t/(t-1)}$ とパラメータ表示（parametrise）できる。より一般に、「上に凸な関数の弦は曲線の下側、接線の上側にある」というのは凸性（convexity）の基本的な不等式である。これはイェンセンの不等式（Jensen's inequality）や相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の根底にある。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、平均値の定理と凸関数を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。