解答例

STEP I 2013、第 9 問

力学 ・ 放物運動と衝突

STEP I 2013、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

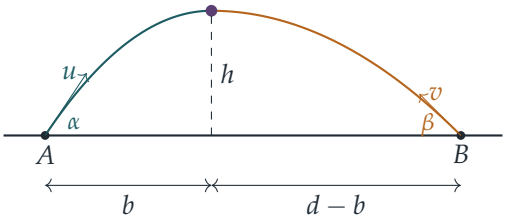
step.maths.org/questions/13-s1-q9

鍵となる考え方

投射体（projectile）は軌道の最高点で鉛直方向の速度をもたない。したがって、そこで衝突が起きたあとに落下して戻るのにかかる時間は、上昇にかかった時間に等しい。出発点に着地するためには、各質点は同じ時間で水平方向の行程を逆にたどらなければならない。そのためには、水平方向の速度がちょうど逆向きになるしかない。これを運動量保存（conservation of momentum）に代入し、2 つの質点が同じ瞬間に最高点に達することを用いれば、あとはすべて導かれる。

解答

A と B を、空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化し、衝突における撃力（impulse）は中心線に沿って働くものとする。衝突は直接衝突であり、その瞬間には両方の質点が水平に運動しているので、この撃力は水平である。x 軸を平面に沿って A の出発点から B の出発点へ向かう向きにとる。すると B は $x = d$ から出発する。



最高点での出会い

A の鉛直方向の速度は $u\sin\alpha - gt$ であるから、最高点に達するのは時刻 $t = u\sin\alpha/g$ である。同様に、B が最も高くなるのは $t = v\sin\beta/g$ である。2 つは同時に投げ出され、それぞれが最高点にあるときに衝突するので、これらの時刻は等しい：

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{よって} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

衝突の直前、A は速度 $u\cos\alpha$ で x 軸の正の向きに、B は速度 $v\cos\beta$ で x 軸の負の向きに運動しており、どちらも鉛直方向の速度はもたない。

衝突のあと

考えてみよう 反発係数（coefficient of restitution）について何もわかっていないのに、衝突後の速度について何かいえるのはなぜだろうか。

鍵を握るのは、出発点に戻るという条件である。撃力は水平なので、衝突直後も A の鉛直方向の速度は 0 のままであり、平面からの高さは h である。（鉛直方向に）静止状態から高さ h を落下するのにかかる時間は、高さ h を上昇するのにかかった時間とちょうど等しく、T である。その間に A は水平方向に $x = b$ から $x = 0$ まで戻らなければならない。ここで $b = u\cos\alpha\, T$ は上昇中に進んだ水平距離である。よって、衝突後の水平方向の速度は

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha :$$

となる。つまり A の水平方向の速度はちょうど逆向きになり、同じ理由で B の水平方向の速度も逆向きになる。（実際、各質点は自分の軌道を逆向きにたどる。）

ここで x 方向の運動量保存より

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{よって} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

いいかえれば、運動量の総和は衝突の前後どちらでも 0 である。(2) を (1) で割ると（α と β は 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間に厳密にあるので、(1) の両辺は 0 でなく、この割り算は許される）

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

衝突の位置

時間 T の間に、A は水平距離 $b = u\cos\alpha\, T$ を進み、B は $v\cos\beta\, T$ を進む。2 つ合わせて間の距離を埋めるので

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

(2) より $v\cos\beta = \dfrac{m}{M}\,u\cos\alpha$ であるから

$$b\left(1+\frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

となり、示すべき式が得られた。(B が重いほど水平方向の動きは遅くなり、出会う点は A の出発点から遠くなる。)

衝突の高さ

A の鉛直方向の運動に $v^2 = u^2 + 2as$ を用いると、最高点の高さは

$$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad \text{一方} \qquad b = u\cos\alpha\cdot\frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

割り算をすると

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{よって} \qquad h = \tfrac{1}{2}\,b\tan\alpha.$$

検算

- 対称性：$m = M$ とすると $\alpha = \beta$ かつ $b = \frac{1}{2}d$ となり、2 つの質点はちょうど真ん中で出会う。当然そうなるべきである。
- 高さの公式は、A の出発点から軌道の最高点へ引いた直線の傾きが $\frac{1}{2}\tan\alpha$、すなわち発射時の傾きの半分であることを示している。これは、放物線の出発点での接線が対称軸と交わる点の高さは頂点の高さの 2 倍である、というよく知られた事実である。B について同じ計算をすると $h = \frac{1}{2}(d-b)\tan\beta$ となり、これが $\frac{1}{2}b\tan\alpha$ と一致するのは、まさに $m\cot\alpha = M\cot\beta$ が成り立つからである。
- 数値で確かめる。$m = 1$、$M = 2$、$\alpha = 45°$、$u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。すると $\cot\beta = \frac{1}{2}$、$v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$d \approx 7.65\,\mathrm{m}$ であり、$b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$、$h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$ が得られる。衝突時に水平方向の速度を反転させて、両方の運動をコンピュータで時間を追って計算すると、2 つの質点がこの点でそれぞれの最高点において出会い、どちらも出発点に着地することが確かめられる。

よくある間違い

- 反発係数を使おうとすること：反発係数は与えられておらず、必要もない。出発点に戻るという条件によって衝突後の速度が決まるからである。
- 2 つの質点が同時に最高点に達しなければならないことを忘れること。この条件から (1) が得られるのであり、これがなければ余接（cot）の式は導けない。

▶ 運動量の式での符号の誤り：衝突前、B は負の向きに運動している。

STEP のその先へ

出発点に戻るという条件は、時間反転（time reversal）にほかならない。重力のもとでのニュートン（Newton）の運動方程式は、時計を逆向きに進めても同じ形をしているので、質点の速度を反転させるとその質点は自分の軌道に沿って戻っていく。この問題では運動量の総和が 0 であり、これは重心系（centre-of-mass frame）で考えていることを意味する。重心系では、弾性衝突（elastic collision）は両方の速度を単に反転させるだけであり、まさにここで起きていることである（したがって、この衝突は完全弾性衝突である）。重心系と保存則については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で見事に論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。