解答例

STEP I 2013、第 8 問

純粋数学 ・ 合成関数

> **STEP I 2013、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q8

鍵となる考え方

合成関数（composite）pq は「まず q を施し、次に p を施す」という意味であり、q の出力が p の定義域（domain）の中に入る範囲でのみ定義される。したがって、定義域は q から決まり（必要ならば制限される）、値域（range）は p が実際にどのような値を受け取るかを考えることで求められる。計算そのものは軽い。得点の鍵は、$\sqrt{x^2} = |x|$ と定義域に注意を払うことにある。小問 (iii) では、恒等式 $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$ がほとんどの仕事をしてくれる。

解答

小問 (i)

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$ である。定義域は b の定義域、すなわち $x > 0$ であり、c はすべての実数を受け付ける。$\ln x$ はすべての実数値をとるので、$2\ln x$ もすべての実数値をとる。よって値域は $\mathbb{R}$ である。
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$ であり、定義域は $x > 0$ である。$\ln x$ はすべての実数値をとるので、その 2 乗は $[0, \infty)$ のすべての値をとる（$x = 1$ のとき 0）。よって値域は $y \geq 0$ である。
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ であり、x ではない。根号は非負の平方根を表すからである。ここで $x^2 \geq 0$ は常に成り立つので、定義域は $\mathbb{R}$ 全体であり、値域は $y \geq 0$ である。
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ であるが、これは $x \geq 0$ の場合に限る。d が先に作用しなければならないからである。よって定義域は $x \geq 0$、値域は $y \geq 0$ である。

da と ad は値域が同じであるが、定義域も式も異なることに注意せよ。これらは異なる関数である。

小問 (ii)

fg について：任意の実数 x に対して $g(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ であるから、$g(x)$ は常に f の定義域に入る。よって

$$fg(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{定義域}\mathbb{R}, \quad \text{値域}y \geq 0.$$

gf について：f が先に作用するので $|x| \geq 1$ が必要である。また g はどんな入力も受け付ける。よって

$$gf(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{定義域}|x| \geq 1, \quad \text{値域}y \geq 1.$$

ここでも 2 つの式は一致するが、関数としては異なる。gf の定義域からは $-1 < x < 1$ が除かれており、そのため値域は 1 から始まる。

小問 (iii)

基本となる事実は

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = x^2-(x^2-1) = 1,$$

であり、したがって $x \geq 1$ に対して $h(x)\,k(x) = 1$ が成り立つ。

h のグラフ（$x \geq 1$）。

- $h(1) = 1$ である。
- $x > 1$ に対して $h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ であるから、h は増加関数である。また $x \to 1^+$ のとき $h'(x) \to \infty$ であるから、曲線は点 $(1,1)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって出発する。
- $x \to \infty$ のとき $h(x) \to \infty$ である。漸近線（asymptote）を求めると、

  $$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  となるので、$y = 2x$ は漸近線であり、曲線は下側から近づく。

したがって h は 1 から連続的に限りなく増加し、その値域は $[1,\infty)$ である。

k のグラフ、$x \geq 1$ の枝。

- $\mathrm{k}(1) = 1$ であり、基本となる事実より $\mathrm{k}(x) = 1/\mathrm{h}(x)$ である。
- h は正で、無限大へ向かって増加するので、k は正で減少し、$\mathrm{k}(x) \to 0^+$ となる。よって $y = 0$ は漸近線であり、曲線は上側から近づく。
- $x \to 1^+$ のとき $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$ である。ここでも点 $(1,1)$ において鉛直な接線をもち、この枝はそこで h のグラフとつながる。

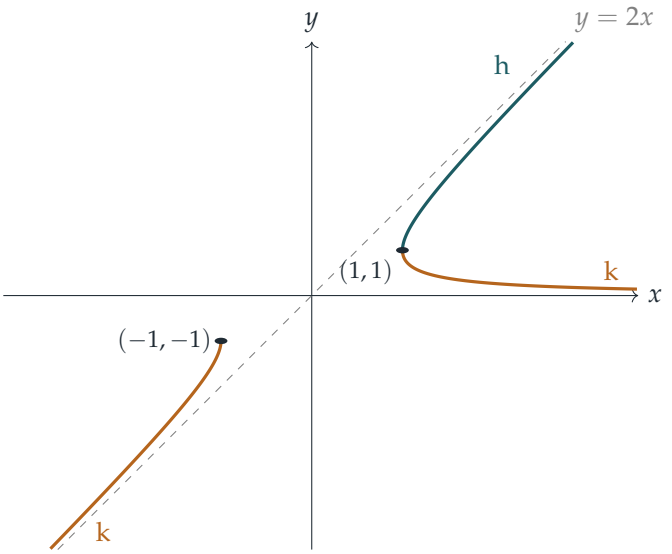
k のグラフ、$x \leq -1$ の枝。

- $\mathrm{k}(-1) = -1$ である。
- $x < -1$ のとき $x < 0$ であるから、$\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$ となり、k は増加関数である。$x \to -1^-$ のとき $\mathrm{k}'(x) \to +\infty$ であるから、点 $(-1,-1)$ において鉛直な接線をもつ。
- x と $-\sqrt{x^2-1}$ はともに負であるから、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{k}(x) \to -\infty$ である。$u \geq 1$ として $x = -u$ とおくと、

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

となるので、$y = 2x$ はこの枝の漸近線でもあり、曲線は上側から近づく。

この枝は $(-\infty, -1]$ のすべての値をとる。



（これらすべてを一度に見渡す巧妙な方法がある。$t \geq 0$ として $x = \cosh t$ とおくのである。すると $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ となるので、$\mathrm{h}(x) = e^t$、$\mathrm{k}(x) = e^{-t}$ である。また $x = -\cosh t$ のときは $\mathrm{k}(x) = -e^t$ である。）

合成関数 kh。 h の定義域は $x \geq 1$ であり、すべての値 $\mathrm{h}(x)$ は $\mathrm{h}(x) \geq 1$ を満たすので、k の定義域に入る。したがって kh は $x \geq 1$ 全体で定義される。

考えてみよう kh は k のグラフのどの部分を実際に用いているか？

$x \geq 1$ の枝のみである。h は 1 未満の値を決して出力しないからである。さらに h は $[1,\infty)$ の**すべての**値をとるので、kh がとる値は、$[1,\infty)$ 上での k の値とちょうど一致する。この枝の上で k は $\mathrm{k}(1) = 1$ から 0 に向かって連続的に減少し、0 には決して到達しない（$\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$ であるから）。よって

$$\mathrm{kh}: \quad \text{定義域} x \geq 1, \qquad \text{値域} 0 < y \leq 1.$$

双曲線関数（hyperbolic function）による見方では、$\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$ であり、これは $t = 0$ のとき 1 から始まる t の減少関数である。

検算

- 具体的な値で確かめる：$\mathrm{h}(2) = 2+\sqrt{3} \approx 3.732$、$\mathrm{k}(2) = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$ であり、その積は 1 である。また $\mathrm{k}(-2) = -2-\sqrt{3} \approx -3.732$ であり、漸近線の解析が予測するとおり、$2x = -4$ のわずかに上にある。
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$ であり、$\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2-1} \approx 0.136$ は $(0,1]$ の中にある。
- $x = 1000$ において、$\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$、$\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$ であり、それぞれ $-1/(2x)$、$1/(2x)$ と一致する。

よくある間違い

- $\sqrt{x^2} = x$ と書いてしまうこと。正しくは $|x|$ であり、だからこそ da、fg、gf は恒等関数（identity）ではない。
- 最終的な式 $|x|$ がいたるところで意味をもつからといって、gf の定義域を $\mathbb{R}$ としてしまうこと。合成関数の定義域は、最初に施される関数によって決まる。
- $x \leq -1$ における k の 2 つ目の枝や、その漸近線 $y = 2x$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

大学では、関数とは定義域、終域（codomain）、対応の規則の三つ組である。ここでの fg と gf のように、規則が同じでも定義域が異なる 2 つの関数は本当に別物であり、逆関数（inverse）、単射性（injectivity）、全射性（surjectivity）を論じ始めるとすぐに、この厳密さが重要になる。関数 h は $e^{\operatorname{arcosh} x}$ であり、$\ln \mathrm{h}(x)$ は $\operatorname{arcosh} x$ を表す標準的な公式である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、関数、連続性（continuity）、単調性（monotonicity）をこのような注意深さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。