解答例

STEP I 2013、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP I 2013、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q7

鍵となる考え方

(i) と (ii) では右辺が比 y/x のみに依存するので、$y = ux$ とおくと、方程式は変数分離（separation of variables）ができる形になる。小問 (iii) ではこのパターンが崩れる。x^2/y は y/x だけの関数ではないからである。これを解決するには、解が x の何乗のように振る舞う「はず」かを考えればよい。2 つの項の釣り合いを考えると $y = u\,x^{3/2}$ とおけばよいことがわかり、そうすると再びすべてが分離できる。

解答

小問 (i)

$y = ux$ とおく。積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ である。$x/y = 1/u$、$y/x = u$ であるから、方程式は

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

となる。u の項が打ち消し合うことが、この置換がうまくいく理由である。変数を分離すると（$x > 0$ なので x で割ってよい）、

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

となる。$x > 0$ なので $\ln|x|$ ではなく $\ln x$ とした。$x = 1$ のとき $y = 2$ であるから $u = y/x = 2$ となり、$2 = 0 + C$ を得る。したがって

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

である。ここで $y>0$ かつ $x>0$ より $u>0$ でなければならないので、正の平方根をとって $u=\sqrt{4+2\ln x}$ となり、

$$y=x\sqrt{4+2\ln x}.$$

を得る。これには $4+2\ln x>0$ が必要である（単に $y\geq 0$ ではなく $y>0$ が必要だからである）。すなわち $\ln x>-2$、つまり $x>\mathrm{e}^{-2}$ である。これが求める結果である。

小問 (ii)

右辺は再び y/x の関数なので、同じ置換 $y=ux$ を用いる。

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}.$$

今回は u の項は打ち消し合わないが、それでも変数は分離できる。

$$\int\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C,$$

ここで左辺の積分は $\frac{1}{2}\int f'/f$ の形であり、$1+u^2>0$ なので絶対値は不要である。$x=1$ で $u=2$ であるから、$C=\frac{1}{2}\ln 5$ となる。両辺を 2 倍して指数をとると、

$$1+u^2=5x^2, \qquad \text{よって} \qquad u=\sqrt{5x^2-1}$$

となる（$u>0$ なので正の平方根をとる）。したがって

$$y=x\sqrt{5x^2-1} \qquad (x>\tfrac{1}{\sqrt{5}}),$$

である。この制限は、$x>0$ のもとで $5x^2-1>0$ であることから来る。

小問 (iii)

今度は $y=ux$ とすると $x^2/y=x/u$ となり、x が単独で残るので、方程式は分離できない。右辺の両方の項が同じようにスケールするような置換が欲しい。

> **考えてみよう** y が累乗 x^k のように振る舞うとすると、$\dfrac{x^2}{y}$ と $\dfrac{2y}{x}$ が同じ大きさになるのは k がどの値のときか。

x^{2-k} と x^{k-1} が一致する必要があるので $2-k=k-1$、よって $k=\frac{3}{2}$ である。（このとき左辺の $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ も $x^{1/2}$ のように振る舞うので、3 つの項すべてが一致する。）そこで置換 $y=u\,x^{3/2}$ を考えると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y}=\frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x}=2u\,x^{1/2}.$$

となる。方程式全体を $x^{1/2}$（これは正である）で割ると、

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+\frac{u}{2}=\frac{2+u^2}{2u}.$$

変数を分離すると、

$$\int\frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln(2+u^2)=\ln x+C.$$

$x=1$ で $u=y/x^{3/2}=2$ であるから $C=\ln 6$ となり、したがって $2+u^2=6x$ である。正の平方根をとって $u=\sqrt{6x-2}$ となるので、

$$y=x^{3/2}\sqrt{6x-2}=\sqrt{6x^4-2x^3} \qquad (x>\tfrac{1}{3}),$$

を得る。ここで $x>\frac{1}{3}$ は $6x-2>0$ のために必要である。

(iii) の別解。方程式に $2y$ を掛け、$z=y^2$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}z=2x^2,$$

となる。これは積分因子（integrating factor）x^{-4} をもつ線形（linear）方程式である。すると $(x^{-4}z)'=2x^{-2}$ となり、$z(1)=4$ を用いて $x^{-4}z=-2/x+6$ を得るので、先と同じく $y^2=6x^4-2x^3$ となる。同じ技法（$z=y^2$）で (i) と (ii) も解ける。

検算

- どの答えも $x=1$ で $y=2$ を与える：$1\cdot\sqrt{4}$、$1\cdot\sqrt{4}$、$\sqrt{6-2}$。
- (ii) の答えを微分して元の式に代入する。$y^2=5x^4-x^2$ より $2yy'=20x^3-2x$ なので、$y'=(10x^3-x)/y$ である。一方、$\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}=\dfrac{10x^4-x^2}{xy}$ となり、両者は一致する。
- $x=2$ では、3 つの解はそれぞれ $2\sqrt{4+2\ln 2}\approx 4.642$、$2\sqrt{19}\approx 8.718$、$4\sqrt{5}\approx 8.944$ を与える。予想どおり、(ii) では y/x の係数が大きいため、y は (i) よりも速く増加する。

よくある間違い

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ の u を書き忘れ、u についての方程式を誤ってしまう。
- 初期条件（initial condition）を u ではなく y に適用してしまう。ここでは $x=1$ で両者は一致するが、(iii) では一般に $u=y/x^{3/2}$ が必要である。
- 定義域（domain）を書き落とす。平方根は実数かつ正でなければならず、そこから $x>\mathrm{e}^{-2}$、$x>1/\sqrt{5}$、$x>\frac{1}{3}$ が得られる。

STEP のその先へ

右辺が y/x のみに依存する方程式は**同次形**（homogeneous）とよばれ、置換 $y = ux$ によって常に変数分離できる。小問 (iii) は、スケーリング対称性（scaling symmetry）が姿を変えて現れたものである。この方程式は $x \mapsto \lambda x$、$y \mapsto \lambda^{3/2} y$ のもとで不変であり、このようなスケーリング対称性があれば、方程式を変数分離形にする置換が必ず見つかる。$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の形の方程式は、$z = y^{1-n}$ とおくと線形になり、ベルヌーイ（Bernoulli）方程式とよばれる。ここでの 3 つの小問はすべて $n = -1$ のこの型である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、1 階方程式の章でこの両方の族を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。