解答例

STEP I 2013、第 6 問

純粋数学 ・ 二項係数とフィボナッチ数

> **STEP I 2013、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q6

鍵となる考え方

パスカルの法則（Pascal's rule）がすべての原動力である。各 B_n は二項係数（binomial coefficient）の和であり、B_{n+2} の各項をパスカルの法則で分解すると、その断片は B_{n+1} と B_n の項にちょうど組み直される。注意が必要なのは和の両端だけである。そこではパスカルの法則が使えず、余った 1 を手で対応させなければならない。B_n は n が偶数か奇数かで定義が異なるので、二つの場合を別々に扱う。

解答

パスカルの法則

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$ であるから、両辺の x^r の係数は一致する。左辺の係数は $\binom{n+1}{r}$ である。右辺は

$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

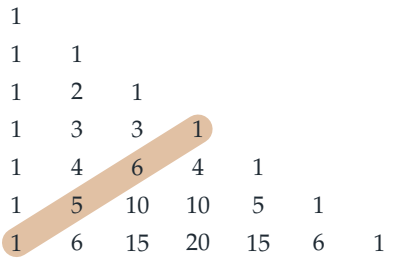
であり、$1 \le r \le n$ のとき、第 1 の和からは $\binom{n}{r}$（$s=r$ の項）、第 2 の和からは $\binom{n}{r-1}$（$s=r-1$ の項）が寄与する。したがって

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

漸化式

B_n が何を表しているかを見ておくとよい。B_n はパスカルの三角形（Pascal's triangle）の「浅い対角線」$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$ を、上の数が下の数以上である最後の項ま

で足し合わせたものである。三角形を左詰めに並べると、$B_6 = 1+5+6+1 = 13$ を構成する項は一直線上に並ぶ。



（琥珀色の帯が $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$ を示している。）

偶数の場合、$n = 2m$（$m \geq 0$）。示すべきは $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$ である。定義より

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

両端の項は、$j = 0$ のときの $\binom{2m+2}{0} = 1$ と、$j = m+1$ のときの $\binom{m+1}{m+1} = 1$ である。$1 \leq j \leq m$ に対しては、上が $2m+1-j$、下が j としてパスカルの法則を用いる。$j \leq m$ から $j \leq 2m+1-j$ が従うので、これは許される。よって

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

(a) において、1 は欠けていた $k = 0$ の項 $\binom{2m+1}{0}$ であるから、(a) は $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$ である。

考えてみよう 第 2 の和は何になるべきか。そして余った 1 はどこへ行くのか。

(b) で $i = j-1$ とおくと、和は $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$ となる。これは B_{2m} から最後の項 $i = m$ を除いたものである。その最後の項は $\binom{m}{m} = 1$ であり、ちょうど余った 1 にあたる。よって (b) $= B_{2m}$ であり、$B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$ が成り立つ。（$m = 0$ のときは和が空になり、この式は $2 = 1+1$ となる。）

奇数の場合、$n = 2m+1$（$m \geq 0$）。示すべきは $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$ である。今度は

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

そのまま残すのは $k = 0$ の項 $1 = \binom{2m+2}{0}$ だけである。$1 \leq k \leq m+1$ に対しては、上が $2m+2-k$、下が k としてパスカルの法則を用いてよい。$k \leq m+1$ から $k \leq 2m+2-k$

が従うからである。したがって

$$\begin{aligned} B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\ &= B_{2m+2} + B_{2m+1}. \end{aligned}$$

今回は余る端の項はない。

任意の $n \geq 0$ は $2m$ または $2m+1$ の形であるから、求めるとおり、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$ が成り立つ。

フィボナッチ数との関係

直接計算すると、$B_0 = \binom{0}{0} = 1$、$B_1 = \binom{1}{0} = 1$ である。フィボナッチ数（Fibonacci numbers）は $F_1 = 1$、$F_2 = 1$ から始まる。よって $B_0 = F_1$、$B_1 = F_2$ であり、二つの数列は同じ漸化式（recurrence）「各項は直前の 2 項の和である」に従う。数学的帰納法（induction）により（$B_n = F_{n+1}$ かつ $B_{n+1} = F_{n+2}$ ならば $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$ である）、

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{すべての} n \geq 0.$$

数列 B はフィボナッチ数列を一つずらしたもの $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ である。

検算

- 定義からいくつかの項を直接計算する。$B_2 = 1 + 1 = 2$、$B_3 = 1 + 2 = 3$、$B_4 = 1 + 3 + 1 = 5$、$B_5 = 1 + 4 + 3 = 8$。これらは $F_3, \ldots, F_6$ である。
- もっと大きな例：$B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = F_{10}$。
- パスカルの法則の確認：$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15 = \binom{6}{2}$。

よくある間違い

- $\binom{m+1}{m+1}$ のような端の項にパスカルの法則を適用してしまう。すると $\binom{m}{m+1}$ が現れるが、これは法則を証明した範囲 $1 \leq r \leq n$ の外である。先に端の項を取り分けておくこと。
- 偶奇（parity）の一方しか扱わない。B_{2m} と B_{2m+1} は定義が異なり、漸化式は偶数番目の項と奇数番目の項を結びつけるので、両方の場合が必要である。

- 添字のずれを誤る。答えは $B_n = F_{n+1}$ であって、$B_n = F_n$ ではない（$B_0 = 1 \neq F_0$ を確かめよ）。

STEP のその先へ

恒等式 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$ には鮮やかな数え上げによる証明がある。両辺はいずれも、$1 \times n$ の帯を正方形とドミノで敷き詰める（tiling）方法の数を数えている（k はドミノの個数であり、$n-k$ 枚のタイルの中からドミノの位置を選ぶ方法が $\binom{n-k}{k}$ 通りある）。同じ集合を二通りに数えて（double counting）恒等式を証明するのは、大学の組合せ論（combinatorics）における中心的な手法である。母関数（generating function）の見方も同様に重要であり、その見方では $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$ となる。さらに学びたければ、Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。