解答例

STEP I 2013、第 5 問

純粋数学 • 2 次曲線と回転

STEP I 2013、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s1-q5

鍵となる考え方

k によって変わるのは xy の項だけであり、この項がどのような曲線になるかを決めている。xy の項がなければ、x と y についてそれぞれ別々に平方完成（completing the square）できる。二次の部分が因数分解（factorise）できるときは、方程式全体が因数分解されて 2 本の直線になることがある。そして二次の部分が完全平方 $(x+y)^2$ のときは、座標軸を 45° 回転（rotation）させると $x+y$ が 1 つの座標になり、見慣れた放物線（parabola）が残る。

また、$x=0$ または $y=0$ とおくと xy の項が消えるので、座標軸との切片（intercept）はどの k に対しても同じであることにも注意しよう。$x^2+3x=0$ から $x=0$ または $x=-3$、$y^2+y=0$ から $y=0$ または $y=-1$ が得られる。どの軌跡（locus）も $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ を通る。

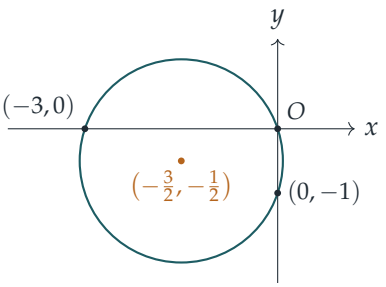
解答

小問 (i)

$k=0$ のとき、各変数について平方完成すると

$$(x+\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

よって軌跡は、中心 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$、半径 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$ の円である。この円は x 軸と $(0,0)$ および $(-3,0)$ で交わり、y 軸と $(0,0)$ および $(0,-1)$ で交わる。（原点と $(-3,0)$ は弦（chord）の両端なので、中心はその垂直二等分線（perpendicular bisector）$x=-\frac{3}{2}$ 上にあり、実際そうなっている。）



小問 (ii)

$k = \frac{10}{3}$ のとき、両辺を 3 倍すると

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 9x + 3y = 0.$$

二次の部分は

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (3x + y)(x + 3y),$$

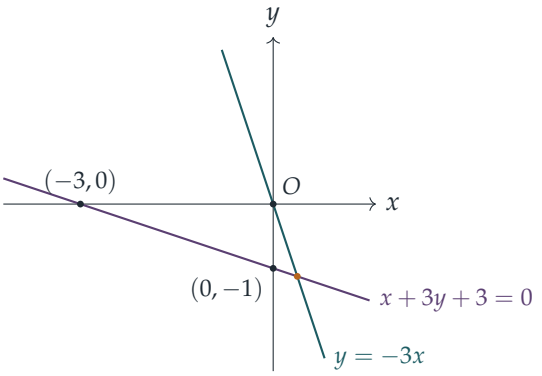
と因数分解でき、一次の部分は $9x + 3y = 3(3x + y)$ であって、共通因数 $3x + y$ をもつ。よって

$$(3x + y)(x + 3y) + 3(3x + y) = (3x + y)(x + 3y + 3) = 0.$$

積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 になるときに限るので、軌跡は 2 本の直線

$$y = -3x \qquad \text{および} \qquad x + 3y + 3 = 0.$$

である。1 本目は原点を通る（これがどちらの軸との唯一の交点でもある）。2 本目は x 軸と $(-3, 0)$ で、y 軸と $(0, -1)$ で交わる。2 式を連立させると $x - 9x + 3 = 0$ となるので、2 直線は $\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$ で交わる。



小問 (iii)

$k = 2$ のとき、方程式は

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

となる。$\theta = 45^\circ$ のとき $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

したがって $x+y = \sqrt{2}\,X$、$y-x = \sqrt{2}\,Y$ であり、これらの和と差をとると

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **考えてみよう** なぜ X と Y を x と y で表すのではなく、x と y を X と Y で表す必要があるのだろうか。

P が曲線上にあることはわかっており、求めたいのは Q が満たす方程式である。したがって、P の軌跡の方程式の x と y に代入しなければならず、そのためには x と y を X と Y で表しておく必要がある。（この写像は回転なので、逆写像は単に逆向きの回転であり、これは容易である。）

一次の部分は

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

となり、$(x+y)^2 = 2X^2$ である。よって Q の軌跡は

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

となり、示すべき式が得られた。どの変形も逆にたどれるので、これはちょうど Q の軌跡である。

これは (X, Y) 平面上の放物線であり、Y が増加する向きに開いている。直線 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$、すなわち $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ に関して対称であり、頂点（vertex）は $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$、$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ にある。

ここで回転をもとに戻す。Q は P を時計回りに 45° 回転して得られたものなので、P の軌跡はこの放物線を**反時計回り**に 45° 回転したものである。x と y で表すと次のようになる。

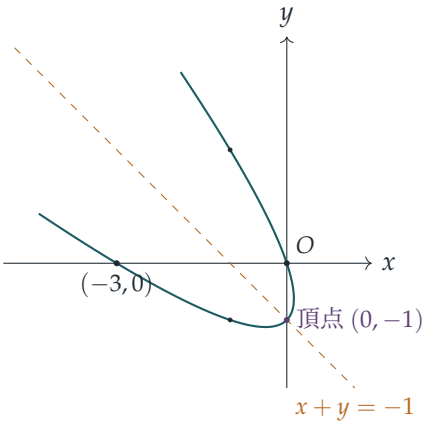
- 対称軸（line of symmetry）$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ は $\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、すなわち

$$x + y = -1;$$

- 頂点は $x = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$、$y = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$、すなわち $(0,-1)$ にある。
- 放物線は $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ が増加する向き、すなわち $(-1,1)$ の向き（左上）に開いている。

切片は最初に述べたとおり $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ であり、$(0,-1)$ は頂点である。頂点における接線（tangent）は対称軸に垂直なので、その傾き（gradient）は 1 である。したがって曲線は頂点で y 軸に接するのではなく、y 軸を横切る。対称性の確認として、$x+y=-1$ に関する鏡映は (a,b) を $(-1-b,-1-a)$ に移すので、原点は $(-1,-1)$ に、$(-3,0)$ は $(-1,2)$ に移る。どちらも $(x+y)^2+3x+y=0$ を満たす。

概形を描くには $u=x+y$ とおくとよい。すると $3x+y=-u^2$ となり、これを解くと $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$、$y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$ が得られる。



P の軌跡は、頂点 $(0,-1)$、対称軸 $x+y=-1$ の放物線である。

検算

- 切片 $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ を 3 つの方程式すべてに代入すると、k の値によらずいずれも 0 になる。
- (ii) では、$(3x+y)(x+3y+3)$ を展開して 3 で割ると、$k=\frac{10}{3}$ のときのもとの方程式に戻る。交点 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$ は $3x+y=0$ と $x+3y+3=0$ の両方を満たす。
- (iii) では、$u=1$ とすると点 $(-1,2)$ は P の軌跡上にある。このとき $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$、$Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ であり、$\sqrt{2}Y=3=(1+1)^2-1$ となる。

よくある間違い

- (iii) で、x, y を X, Y で表す代わりに、X, Y の式を方程式に代入してしまう。
- 放物線を逆向きに回転して戻してしまい、対称軸を $x+y=-1$ ではなく $y-x=-1$ としてしまう。
- (ii) で、一次の項が共通因数 $3x+y$ をもつことを見落とし、軌跡を別の種類の二次曲線として扱ってしまう。

STEP のその先へ

方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ はどれも二次曲線（conic）を表し、その種類は二次の部分の判別式（discriminant）b^2-4ac によって決まる。負なら楕円（ellipse）（ここでは $k=0$ の円）、0 なら放物線（$k=2$）、正なら双曲線（hyperbola）であり、双曲線は 2 本の直線に退化することがある（$k=\frac{10}{3}$）。大学 1 年の線形代数の講義では、二次形式（quadratic form）の対称行列（symmetric matrix）の固有ベクトル（eigenvector）の方向へ回転することで、xy の項を系統的に消去する方法を学ぶ。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこれをわかりやすく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。