解答例

STEP I 2013、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2013、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q4

鍵となる考え方

小問 (i) では、どちらの被積分関数（integrand）も「あるものの関数に、そのあるものの導関数（derivative）を掛けたもの」になっている。$\sec^2 x$ は $\tan x$ の導関数であり、$\sec x \tan x$ は $\sec x$ の導関数である。小問 (ii) では、x や x^2 という余分な因数があるので、部分積分（integration by parts）を用いる。積分する側に選ぶのは三角関数の因数であり、その積分の仕方はまさに小問 (i) で示したばかりである。

解答

小問 (i)

1 つ目の積分では、$u = \tan x$ と置換（substitution）する。すると $\mathrm{d}u = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = 0$、$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = 1$ となる。よって

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

となる。ここで $n > 0$ より $0^{n+1} = 0$ であることを用いた。

> **考えてみよう** 2 つ目の積分について、$\sec^n x \tan x$ の中にはどの関数の導関数が隠れているだろうか。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$ であるから、$\sec x$ の因数を 1 つ切り離す。

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \, (\sec x \tan x).$$

ここで $u = \sec x$ と置換すると $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = \frac{1}{4}\pi$

のとき $u=\sqrt{2}$ である。$n>0$ なので n で割ることができ、

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^n x\tan x\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}u^{n-1}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^n-1}{n},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

1 つ目の積分。これを I_1 とおく。x を微分し、$\sec^4 x\tan x$ を積分する形で部分積分を行う。小問 (i) の置換 $u=\sec x$ により、原始関数（antiderivative）

$$\int\sec^4 x\tan x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}\sec^4 x+C.$$

が得られる（$[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上の定積分（definite integral）は $\frac{1}{4}(4-1)=\frac{3}{4}$ であり、これは小問 (i) の $n=4$ の場合である）。したがって

$$I_1=\left[\tfrac{1}{4}x\sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x,$$

となる。$\sec^4\frac{1}{4}\pi=(\sqrt{2})^4=4$ だからである。残った積分については、$\sec^2 x=1+\tan^2 x$ と書き換えると

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sec^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\tan^2 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

となる。ここで 1 つ目の積分は $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi}=1$ であり、2 つ目は小問 (i) の $n=2$ の場合である。ゆえに

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\sec^4 x\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

2 つ目の積分。これを I_2 とおく。今度も x のべきを微分し、$\sec^2 x\tan x$ を積分する。原始関数の 1 つは $\frac{1}{2}\sec^2 x$ であるが、$\frac{1}{2}\tan^2 x$ でも同じように使える（両者の差は定数 $\frac{1}{2}$ である）。そして、こちらのほうがよい選択である。

> ? **考えてみよう** なぜ $\frac{1}{2}\sec^2 x$ よりも $\frac{1}{2}\tan^2 x$ のほうがよいのだろうか。

部分積分を行うと $x\tan^2 x$ が残るが、$\tan^2 x=\sec^2 x-1$ と分解すれば、それぞれ積分できる部分に分かれる。また、$\tan^2 x$ は 0 で 0 になるので、境界項（boundary terms）がすっきりする（$\frac{1}{2}\sec^2 x$ を用いても、最終的には同じ答えになる）。

そこで、$\tan\frac{1}{4}\pi=1$ を用いると

$$I_2=\left[\tfrac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}x\tan^2 x\,\mathrm{d}x.$$

となる。ここで

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

である。$\sec^2 x$ の原始関数として $\tan x$ をとってもう一度部分積分を行い、$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln\sec x$（この区間では $\sec x > 0$ なので成り立つ）を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln\sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

となる。以上をまとめると

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

すなわち

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

検算

- 小問 (i) で $n = 1$ とすると、2 つの公式からそれぞれ $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ と $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$ が得られる。これは $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$ と $[\sec x]$ から直接確かめられる。
- 符号と大きさ：小問 (ii) の被積分関数はどちらも $(0, \frac{1}{4}\pi)$ で正であり、答え $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$ と $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$ もともに正である。2 つ目のほうが小さいのは当然で、この区間では $x^2\sec^2 x \le x\sec^4 x$ が成り立つからである（$x < 1 < \sec^2 x$ による）。
- 大まかな評価：$x\sec^4 x\tan x \le \frac{\pi}{4}\sec^4 x\tan x$ より、$I_1 \le \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{4} \approx 0.589$ である。得られた 0.452 はこれと矛盾しない。電卓で数個の区間に分けてシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いれば、どちらの値にもかなり近い値が得られる。

よくある間違い

- 小問 (i) の 2 つ目の積分で、先に $\sec x\tan x$ を切り離さずに $u = \sec x$ と置換してしまい、べきが $n - 1$ ではなく n のままになる。
- $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、したがって $\sec^4\frac{1}{4}\pi = 4$、$\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$ であることを忘れる。
- 境界項 $\left[\frac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]$ を落とす、あるいは $\int \tan x\,\mathrm{d}x$ の符号を間違える（正しくは $\ln\sec x = -\ln\cos x$ である）。

STEP のその先へ

小問 (i) の積分は、$\sec^m x \tan^n x$ の積分に関する標準的な理論の第一歩であり、そこでは漸化式（reduction formulae）を用いてべきを一段ずつ下げていく。小問 (ii) のように多項式の因数を含む部分積分は、「表形式」の方法（tabular method）へと一般化され、さらにずっと先では、微分方程式（differential equations）の弱解（weak solutions）の基礎にある、導関数をある関数から別の関数へ移すという考え方につながる。置換積分と部分積分がなぜ成り立つのかを丁寧に説明したものとしては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。この種の問題をさらに多く解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）に挑戦してみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。