解答例

STEP I 2013、第 3 問

純粋数学 • ベクトルの演算

> **STEP I 2013、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q3

鍵となる考え方

ここで扱うものはすべて線形（linear）であるから、毎回もっとも見通しのよい方法は、各点を $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z}$ の組合せとして書き出し、それから引き算することである。2 点が異なるのは、それらの位置ベクトル（position vector）の差が零でないときであり、かつそのときに限る。そしてその差は、つねに簡単な係数と $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ のようなベクトルの積になる。幾何的には、$X*Y$ は直線 XY 上の点であり、$0<\lambda<1$ のときは 2 点を結ぶ線分（segment）上にある。

解答

以下を通じて、2 点が同じであるのは、それらの位置ベクトルが等しいときであり、かつそのときに限る。

小問 (i)

定義より $Y*X$ の位置ベクトルは $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$ であるから、

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})-(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

X と Y は異なるので $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ であり、したがってこの差が零となるのは $2\lambda-1=0$ のとき、かつそのときに限る。よって $X*Y$ と $Y*X$ は、$\lambda=\frac{1}{2}$ の場合を除いて異なる。$\lambda=\frac{1}{2}$ のときは、どちらも XY の中点である。

小問 (ii)

両辺をそれぞれ展開すると、

$$(X*Y)*Z: \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+(1-\lambda)\mathbf{z} = \lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},$$
$$X*(Y*Z): \quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.$$

$\mathbf{y}$ の項は一致しており、引き算すると

$$\begin{aligned} \text{差} &= (\lambda^2-\lambda)\mathbf{x}+((1-\lambda)-(1-\lambda)^2)\mathbf{z} \\ &= -\lambda(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{z} \\ &= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}). \end{aligned}$$

これが零でないのは、各因子がすべて零でないとき、かつそのときに限る。したがって $(X*Y)*Z$ と $X*(Y*Z)$ が異なるための必要十分条件は

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq 1 \qquad \text{かつ} \qquad Z \neq X.$$

である。Y がまったく関わらないことに注意しよう。除外される値にも納得がいく。$\lambda = 1$ ならこの演算はつねに 1 番目の点を返し、$\lambda = 0$ ならつねに 2 番目の点を返すので、どちらの括弧の付け方でもそれぞれ X、Z となるのである。

小問 (iii)

式を簡潔にするため $\mu = 1-\lambda$ とおく。右辺は

$$\begin{aligned} (X*Z)*(Y*Z): \quad & \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})+\mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}) \\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu(\lambda+\mu)\mathbf{z} \\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z}, \end{aligned}$$

となる。ここで $\lambda+\mu = 1$ を用いた。これは小問 (ii) で求めた $(X*Y)*Z$ の展開とまったく同じであるから、すべての点 X、Y、Z に対して

$$(X*Y)*Z = (X*Z)*(Y*Z)$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

考えてみよう $X*(Y*Z)$ に対する「対応する結果」はどのような形になるべきだろうか。

小問 (iii) では、外側の $*Z$ が左側の括弧の中に分配されている。その鏡像は、$X*$ を右側の括弧の中に分配することであり、$(X*Y)*(X*Z)$ を試してみればよいと考えら

れる。実際、

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})\\ =\lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z}\\ =\lambda\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

であり、これは小問 (ii) で求めた $X*(Y*Z)$ の展開である。したがって、任意の点 X、Y、Z に対して

$$X*(Y*Z)=(X*Y)*(X*Z).$$

小問 (iv)

P_n の位置ベクトルが

$$\mathbf{p}_n=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

であることを示す。$n=1$ のとき、これは $X*Y$ の定義そのものである。$n-1$ のときに成り立つとすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n=\lambda\mathbf{p}_{n-1}+(1-\lambda)\mathbf{y}&=\lambda^n\mathbf{x}+(\lambda-\lambda^n+1-\lambda)\mathbf{y}\\ &=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

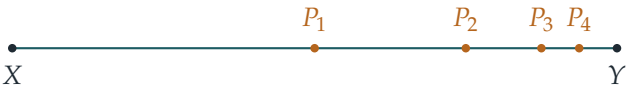
となるので、数学的帰納法（induction）により、この式はすべての $n\geq 1$ で成り立つ。

次に線分に沿って測ると、

$$\mathbf{p}_n-\mathbf{x}=(1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\qquad \mathbf{y}-\mathbf{p}_n=\lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

$0<\lambda<1$ より $0<\lambda^n<1$ であるから、どちらも同じ零でないベクトル $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ の正の定数倍である。したがって P_n は X と Y の間（端点を除く）にあり、

$$XP_n:P_nY=(1-\lambda^n):\lambda^n.$$



$\lambda=\frac{1}{2}$：各ステップで Y までの距離が半分になる

各ステップで Y までの残りの距離が λ 倍になるので、点は Y に向かって進んでいき、$n\to\infty$ のとき $P_n\to Y$ となる。

検算

- 小問 (i) で、直線上に $\mathbf{x}=\mathbf{0}$、$\mathbf{y}=\mathbf{1}$ をとり、$\lambda=\frac{1}{3}$ とする。$X*Y$ は $\frac{2}{3}$ に、$Y*X$ は $\frac{1}{3}$ にあり、その差は $\frac{1}{3}=|2\lambda-1|$ である。

- 小問 (ii) で $Z = X$ ならば、任意の λ について **2** 通りの括弧の付け方は一致するはずである。実際、求めた差 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ はこのとき零になり、期待どおりである。
- 小問 (iv) で $\lambda = \frac{1}{2}$、$n = 3$ とすると比は $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7 : 1$ であり、実際 P_3 は X から Y までの $\frac{7}{8}$ の位置にある（距離を 3 回半分にしたことになる）。$n = 1$ のとき、比 $(1-\lambda) : \lambda$ はまさに $X * Y$ の定義である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $Z \neq X$ を忘れること。答えは λ に関する条件だけではない。
- 小問 (iv) で比を逆にしてしまうこと。$\mathbf{p}_n$ は $\mathbf{x}$ に重み λ^n をもつので、λ^n が大きいときに X に近くなる。したがって短い方の部分 XP_n が $1-\lambda^n$ に対応する。

STEP のその先へ

点 $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ は凸結合（convex combination、アフィン結合（affine combination）ともいう）であり、凸集合、重心座標、そしてコンピュータグラフィックスにおける線形補間の基本的な構成要素である。小問 (ii) は $*$ が結合的（associative）でないことを、小問 (iii) は $*$ が自己分配的（self-distributive）であることを示している。この性質をもつ演算は、代数学においてラック（rack）、カンドル（quandle）、メディアル代数（medial algebra）などの名前で研究されている。線形代数の観点からは、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。