解答例

STEP I 2013、第 2 問

純粋数学 ・ 床関数を含む方程式

> **STEP I 2013、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q2

鍵となる考え方

関数 $\lfloor x \rfloor$ は各区間 $[k, k+1)$ 上で一定なので、その区間上で $f(x) = k/x$ は直角双曲線（rectangular hyperbola）の一部にすぎない。グラフ全体は、整数 k ごとに一つずつあるこれらの断片の連なりである。すると $f(x) = c$ を解くことは、どの断片が高さ c に届くかを問うことに帰着する。k に対応する断片上で候補となるのは $x = k/c$ だけであり、それが解として数えられるのは、ちょうど $[k, k+1)$ に入るときである。

解答

小問 (i)

整数 k を固定し、$k \le x < k+1$（ただし $x \neq 0$）の範囲を考える。ここでは $f(x) = k/x$ である。

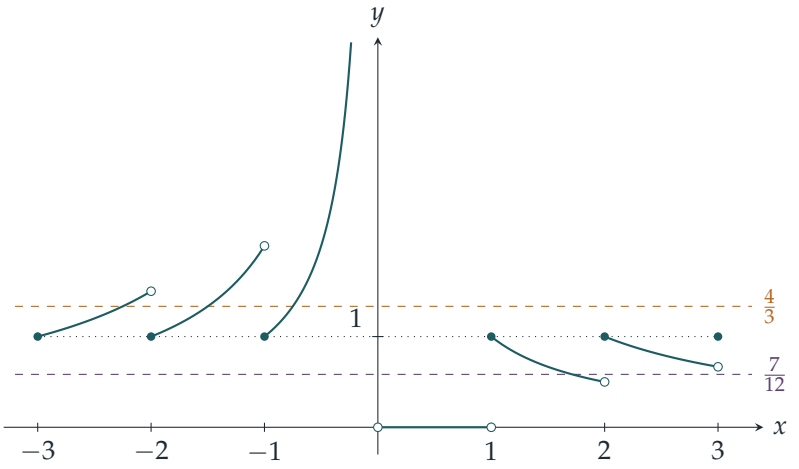
- $k = 0$、すなわち $0 < x < 1$ のとき：ここでは $f(x) = 0$ である。
- $k \ge 1$ のとき：$f(x) = k/x$ は $f(k) = 1$ から $k/(k+1)$ に向かって減少するが、その値には決して達しない。したがって、この断片がとる値はちょうど $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$ の範囲の値である。
- $k \le -1$ のとき：$m \ge 1$ として $k = -m$ と書く。このとき x と k はともに負なので、$f(x) = m/|x| > 0$ である。x が $-m$ から $-m+1$ に向かって増加すると $|x|$ は減少するので、f は $f(-m) = 1$ から増加する。$m \ge 2$ のときは $\frac{m}{m-1}$ に近づくが、その値には決して達しないので、この断片がとる値はちょうど $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$ の範囲の値である。$m = 1$ のときは $x \to 0^-$ で $f(x) = -1/x \to +\infty$ となるので、この断片は $[1, \infty)$

の範囲の値をとる。

$-3 \le x \le 3$ における断片は次のとおりである。

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
値	$[1,\frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2},1]$	$(\frac{2}{3},1]$

そして最後に $f(3)=1$ である。どの断片も左端（整数の点）で高さ 1 から始まり、その点は含まれる。また右端は開いている。



小問 (ii)

$\lfloor x \rfloor = k$ となる断片上では、方程式 $f(x)=c$（ただし $c \neq 0$）は $k/x = c$ を意味するので、$x = k/c$ である。これが本当の解（root）となるのは、ちょうど $k \le k/c < k+1$ のときである。したがって各 c について、小問 (i) で求めた値域を用いて、どの断片が高さ c に届くかを判定すればよい。

$f(x) = \frac{7}{12}$. $0 < \frac{7}{12} < 1$ であるから、役に立つのは $k \ge 1$ の断片だけであり、$\frac{k}{k+1} < \frac{7}{12}$、すなわち $12k < 7k+7$、すなわち $k < \frac{7}{5}$ が必要である。よって条件を満たすのは $k=1$ だけであり、$x = 1\big/\frac{7}{12}$ より

$$x = \frac{12}{7}.$$

グラフ上では、直線 $y = \frac{7}{12}$ は $[1,2)$ 上の断片とだけ交わる。$[2,3)$ 上の断片は $\frac{2}{3}$ より上にあるからである。

$f(x) = \frac{17}{24}$. 今度は $\frac{k}{k+1} < \frac{17}{24}$、すなわち $24k < 17k + 17$、すなわち $k < \frac{17}{7}$ が必要なので、$k = 1$ または $k = 2$ である。解は $x = k/\frac{17}{24}$ であり、

$$x = \frac{24}{17} \quad \text{および} \quad x = \frac{48}{17}.$$

(実際、$2 \leq \frac{48}{17} \approx 2.82 < 3$ である。)

$f(x) = \frac{4}{3}$. $\frac{4}{3} > 1$ であるから、役に立つのは負の側の断片だけである。$k = -m$ の断片が $\frac{4}{3}$ に届くのは $\frac{4}{3} < \frac{m}{m-1}$ (または $m = 1$) のとき、すなわち $4m - 4 < 3m$、すなわち $m < 4$ のときである。よって $m = 1, 2, 3$ であり、解は $x = -m/\frac{4}{3} = -\frac{3m}{4}$ より

$$x = -\frac{3}{4}, \quad x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\frac{9}{4}.$$

$m = 4$ の場合はわずかに届かない。$[-4, -3)$ 上の断片がとるのは $\frac{4}{3}$ 未満の値だけである。

小問 (iii)

ここでは $0 < \frac{9}{10} < 1$ なので、解は $k \geq 1$ かつ $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$、すなわち $10k < 9k + 9$、すなわち $k < 9$ となる断片から得られる。よって $k = 1, 2, \ldots, 8$ のそれぞれが解 $x = \frac{10k}{9}$ を与える。最大のものは $k = 8$ のときの

$$x = \frac{80}{9} \approx 8.89,$$

であり、これは確かに $[8, 9)$ に入っている。

最後の小問

まず、解をもたない、または解を無限に多くもつ c の値を調べる。

- $c < 0$：解はない。$x > 0$ のとき $f(x) \geq 0$ であり、$x < 0$ のとき $f(x) > 0$ だからである。
- $c = 0$：すべての $x \in (0, 1)$ が解であるから、解は無限に多い。
- $c = 1$：零でないすべての整数が解であるから、やはり解は無限に多い。

> **考えてみよう** 一般の c に対して、グラフを描かずに解の個数を数えるにはどうすればよいだろうか。

小問 (i) で求めた値域を用いる。各断片が与える解は高々一つなので、値域が c を含む断片の個数を数えればよい。

$0 < c < 1$ **の場合。** c に届く断片は、$k \geq 1$ かつ $\frac{k}{k+1} < c$ を満たすものである。$\frac{k}{k+1}$ は k について増加するので、それらは $k = 1, 2, \ldots$ から、$\frac{k}{k+1} < c$ を満たす最後の k までである。したがって、解がちょうど n 個となるのは、n 番目の断片は c に届くが $(n+1)$ 番目の断片は届かないときに限る：

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

（$0 < c \leq \frac{1}{2}$ のときはどの断片も c に届かず、解は存在しない。）

$c > 1$ **の場合。** c に届く断片は、$k = -m$ であって、$m = 1$ または $\frac{m}{m-1} > c$ を満たすものである。$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$ は m が増加すると減少するので、それらは $m = 1, 2, \ldots$ から、$\frac{m}{m-1} > c$ を満たす最後の m までである。したがって、解がちょうど n 個となるのは、$m = n$ の断片は c に届くが $m = n+1$ の断片は届かないときに限る：

$$\frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

また $n = 1$ のときは単に $c \geq 2$ である（$[-1, 0)$ 上の断片はつねに c に届き、$[-2, -1)$ 上の断片は $c \geq 2$ のとき届かない）。

結論。 $n \geq 1$ に対し、方程式 $f(x) = c$ がちょうど n 個の解をもつための必要十分条件（if and only if）は

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{または} \qquad \frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1},$$

である。ただし $n = 1$ のときは、二つ目の条件を $c \geq 2$ と読み替える。等号がどこに付くかに注意しよう。どちらも断片の開いた端に由来する。$c = \frac{n+1}{n+2}$ には $[n+1, n+2)$ 上の断片は届かず、$c = \frac{n+1}{n}$ には $[-(n+1), -n)$ 上の断片は届かない。したがって、これらの境界値はいずれも、やはりちょうど n 個の解を与える。

検算

- 代入して確かめる。$\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$ であり $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$、$\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$ であり $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$、$\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$ であり $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$、$\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$ であり $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$ である。
- 一般の答えは個別の場合と一致する。$\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \leq \frac{3}{4}$ より $n = 2$、$\frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ より $n = 3$、$\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \leq \frac{9}{10}$ より $n = 8$ である。後の二つは範囲のちょうど端点にあるので、$\leq$ と $<$ の置き方の確認になる。
- 境界値として、$c = 2$ では解が一つになるはずである。実際、$x = -\frac{1}{2}$ は解であり、一方 $x = -1$（$k = -2$ から得られるもの）は $\lfloor -1 \rfloor = -1 \neq -2$ なので解ではない。

- $c = \frac{1}{2}$ を試すと、条件を満たす n は存在しない。実際、$x = k/c = 2k$ は $k \neq 0$ のとき $\lfloor 2k \rfloor = k$ を決して満たさない。

よくある間違い

- $\lfloor x \rfloor$ は負の x に対しても**下向きに**丸めるので、$\lfloor -2.25 \rfloor = -3$ であって -2 ではないことを忘れる。これを忘れると、$c > 1$ に対する負の側の枝がまるごと抜け落ちてしまう。
- 端点を取り違える。各断片は左端（整数の点）を高さ 1 で含むが、右端は含まない。これによって、最終的な条件に現れるのが $\leq$ か $<$ かが決まる。
- 解が無限に多い $c = 0$ と $c = 1$ の場合や、解が存在しない $c < 0$ と $0 < c \leq \frac{1}{2}$ の場合を見落とす。

STEP のその先へ

$\lfloor x \rfloor / x$ のような関数は、各断片上では連続（continuous）だが孤立した点で跳ぶ関数の、最も簡単な例である。どの端点で値が実際にとられるかに注意を払うことは、まさに大学で最初に学ぶ解析学の講義で上限（supremum）と下限（infimum）を扱うときに必要となる習慣である。ここで $\sup f$ は $x > 0$ において 1 であり、これは達成されるが、$x \geq 1$ における下限は $\frac{1}{2}$ であり、これは達成されない。同じ関数から、$x \to \infty$ のとき $\lfloor x \rfloor / x \to 1$ となることもわかる。これは解析的整数論（analytic number theory）で用いられる評価を初めて味わう例である。上限、極限、連続性についてさらに学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis* がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。