解答例

STEP I 2013、第 11 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP I 2013、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q11

鍵となる考え方

2 本の糸は、水平方向に対してそれぞれ反対側に角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ と α をなすので、互いに**垂直**（perpendicular）である。垂直な 2 つの力 $T\cos\beta$ と $T\sin\beta$ は、大きさ T で、1 つ目の力から β だけ回転した向きの 1 つの力に合成される。2 本の糸を、水平方向と角 $\alpha + \beta$ をなす大きさ T の 1 つの引く力に置き換えてしまえば、どちらの小問も短い演習問題になる。(i) では極限摩擦（limiting friction）を扱い、(ii) ではブロックが面からすっかり持ち上がってしまうことに気づけばよい。

解答

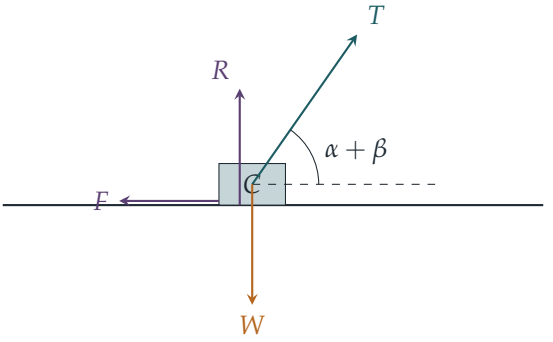
C を質点（particle）とみなし、糸は軽いとする。x 軸を水平で B の向きに、y 軸を鉛直上向きにとる。

張力の合力

糸 BC は x 軸の正の向きから上方に角 α の向きを指すので、その単位ベクトル（unit vector）は $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ である。糸 AC は x 軸の負の向きと角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ をなすので、x 軸の正の向きに対して角 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ の向きを指し、その単位ベクトルは $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ である。これらは互いに垂直である。したがって、糸が引く力の合計は

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= T(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

となる。よって、2 本の糸は、水平方向から上方に角 $\alpha+\beta$ をなし B の側へ引く、大きさ T の 1 つの力とまったく同じようにはたらく。$0<\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$ であるから、どちらの成分も正である。



小問 (i)

R を垂直抗力（normal reaction）、F を摩擦力（friction force）とする。摩擦力は（ブロックが静止しているならば）水平で B から遠ざかる向きにはたらく。釣り合い（equilibrium）の条件は

$$\begin{aligned}&\text{鉛直方向:}\quad R+T\sin(\alpha+\beta)=W, \qquad \text{よって} R=W-T\sin(\alpha+\beta),\\ &\text{水平方向:}\quad F=T\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

である。条件 $W>T\sin(\alpha+\beta)$ により $R>0$ となるので、ブロックは確かに面に押しつけられており、摩擦がはたらきうる。ブロックが静止したままであるのは、必要な摩擦力がその極限値を超えないとき、すなわち $F\le\mu R$ のときである：

$$T\cos(\alpha+\beta)\le\mu(W-T\sin(\alpha+\beta)).$$

ここで $\mu=\tan\lambda=\sin\lambda/\cos\lambda$ とおき、両辺に $\cos\lambda$ を掛ける。λ は鋭角なので、これは正である：

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda\le W\sin\lambda-T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

移項して $\cos(P-Q)=\cos P\cos Q+\sin P\sin Q$ を用いると

$$W\sin\lambda\ge T(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda+\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda)=T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

となり、これが求める条件である。（どの段階も逆にたどれるので、実際には、ブロックが静止したままであるのはこれが成り立つとき、かつそのときに限る。）

? **考えてみよう** そもそもなぜ条件 $W>T\sin(\alpha+\beta)$ が必要なのだろうか。

この条件がなければ、鉛直方向の式から $R \leq 0$ となってしまう。面は押すことはできても引くことはできないので、負の R はありえない。ブロックは持ち上げられる（あるいはかろうじて触れているだけになる）ので、ブロックを支える摩擦ははたらかない。これはまさに小問 (ii) の状況である。

小問 (ii)

今度は $\alpha + \beta = 2\phi$ として $W = T\tan\phi$ であるから、$0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ である。重力と、糸が上向きに引く力を比べると

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta) - W &= T(2\sin\phi\cos\phi - \tan\phi) \\ &= T\tan\phi\,(2\cos^2\phi - 1) \\ &= T\tan\phi\cos 2\phi > 0, \end{aligned}$$

となる。$0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ より $\tan\phi$ と $\cos 2\phi$ はともに正だからである。よって、糸が上に引く力は重力が下に引く力より大きい。もしブロックが面上にとどまるとすれば $R = W - T\sin(\alpha+\beta) < 0$ でなければならないが、これはありえない。したがって、ブロックはただちに面を離れる。すなわち $R = 0$ であり、接触がないので摩擦もはたらかない。

このとき、はたらく力は角 2ϕ の向きの引く力 T と重力だけである。合力（resultant force）は

$$(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi - T\tan\phi) = (T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi) = \frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}(\cos\phi,\ \sin\phi),$$

である。ここで鉛直成分には上の計算を用いた。その大きさ $T\cos 2\phi/\cos\phi$ は正なので、合力はゼロではない。ブロックは静止状態から動き出すので、初期の加速度（acceleration）、したがって動き始める向きは合力の向きである。その向きは $(\cos\phi, \sin\phi)$、すなわち水平方向から上方に角 ϕ をなす（B の側への）向きであり、題意が示された。

検算

- $T = 10\,\mathrm{N}$、$\alpha = 20°$、$\beta = 40°$ とすると、$\phi = 30°$、$W = 10\tan 30° \approx 5.77\,\mathrm{N}$ である。上向きに引く力は $10\sin 60° \approx 8.66\,\mathrm{N} > W$ であり、合力は $(10\cos 60°,\ 8.66 - 5.77) = (5,\ 2.89)$、その角は $\arctan(2.89/5) = 30° = \phi$ となる。
- (i) において、$\lambda = \frac{1}{2}\pi$（無限に粗い面）とすると $W \geq T\sin(\alpha+\beta)$ となり、これはすでに成り立っているので、ブロックは決して滑らない。$\lambda \to 0$（なめらかな面）とすると $0 \geq T\cos(\alpha+\beta)$ となり、これは成り立たないので、なめらかな面ではブロックを支えられない。どちらも予想どおりである。

- (i) の条件は、α, β, T, W, μ を多数ランダムに選び、直接の判定 $F \leq \mu R$ と照らし合わせることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 2 本の糸が垂直であることに気づいてまず合成する代わりに、それぞれの糸を別々に分解して、式変形の中で迷子になる。
- 小問 (ii) で $R = W - T\sin(\alpha + \beta)$ と書き、R が負になることに気づかずに摩擦の議論を続けてしまう。
- 静止状態から動き出す質点は、はじめ合力の向きに動くということの根拠を述べ忘れる。

STEP のその先へ

摩擦角（angle of friction）λ の考え方とは、垂直抗力と極限摩擦力を合成すると、法線と角 λ をなす 1 つの全抗力（total reaction）になるというものである。釣り合いが可能なのは、全抗力がこの「摩擦円錐」（cone of friction）の内部にありうるとき、かつそのときに限る。小問 (i) は、この主張を形を変えて述べたものであり、同じ描像によって 3 次元の摩擦や剛体（rigid body）の問題も扱うことができる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、束縛、接触力を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。