解答例

STEP I 2013、第 10 問

力学 ・ 反発係数と摩擦

> **STEP I 2013、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q10

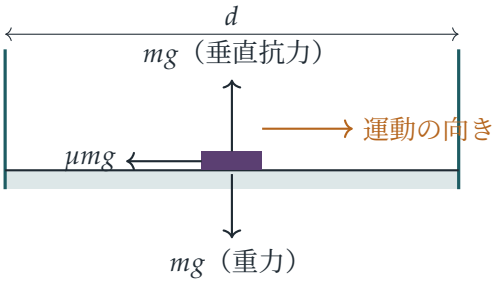
鍵となる考え方

衝突と衝突の間にはたらく水平方向の力は摩擦（friction）だけなので、パックは一定の減速度（deceleration）μg で運動し、等加速度運動の公式 $v^2 = u^2 + 2as$ によって、一方の壁を離れるときの速さと次の壁に到達するときの速さが結びつく。そのうえでニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、到達時の速さが r 倍される。その結果 v_i^2 についての線形漸化式（linear recurrence）が得られる。線形漸化式 $w_{i+1} = aw_i + b$ は、その不動点（fixed point）だけずらせば、単なる等比数列（geometric sequence）になって解ける。

解答

漸化式

パックを、壁に垂直な直線上を運動する質点とみなす。衝突と衝突の間に氷上を滑っている間、鉛直方向の加速度はないので垂直抗力（normal reaction）は mg であり、パックは滑っているので摩擦力は最大値（limiting friction）μmg をとり、運動を妨げる向きにはたらく。



ニュートンの第二法則より減速度は一定値 μg である。よって、（i 回目の衝突の直後に）速さ v_i で出発して長さ d の区間を横断するとき、反対側の壁に到達したときの速さ u は

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

を満たす。壁は固定されているので、ニュートンの反発の法則より、パックは近づく速さの r 倍の速さで跳ね返る：$v_{i+1} = ru$。両辺を 2 乗すると

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{よって} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

となり、示すべき式が得られた。最初の速さを $v_0 = v$ と書けば、最初の横断にも同じ議論が当てはまるので、この漸化式はすべての $i \geq 0$ で成り立つ。

横断の回数

両辺を $2\mu g d$ で割り、$w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$ とおくと、$w_0 = k$ であり

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

となる。「n 回の横断の後に壁に接して静止する」とは、n 回目の横断の終わりにパックが速さ 0 で壁に到達することを意味する。このとき跳ね返る速さも 0 なので $v_n = 0$、すなわち $w_n = 0$ である（また $i < n$ では $w_i > 0$）。

> **考えてみよう** $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$ はどのように解けばよいか？

定数解 $w_i = c$ を探す。$c = r^2(c-1)$ が必要なので $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$ であり、$r \neq 1$ なのでこれは意味をもつ。漸化式から $c = r^2(c-1)$ を辺々引くと

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

となるので、$w_i - c$ は公比 r^2 の等比数列である：

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

$w_n = 0$ とおくと $r^{2n}(k-c) = -c$、すなわち

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}(k(1-r^2)+r^2) = 1.$$

を得る。両辺に r^{-2n} を掛けて整理すると

$$r^{-2n} = 1 + k(r^{-2}-1), \qquad \text{よって} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1+k(r^{-2}-1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

となる（$0 < r < 1$ より $\ln(1/r) > 0$ であり、$k > 0$ かつ $r^{-2} > 1$ より対数の中身は 1 より大きいので、当然ながら $n > 0$ となる）。

$r = \mathrm{e}^{-1}$ の場合

このとき $r^{-2} = \mathrm{e}^2$、$\ln(1/r) = 1$ なので、公式は

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

となり、これが求める結果である。

$r = 1$ の場合

漸化式は $w_{i+1} = w_i - 1$ となる。壁での損失がないので、1 回の横断ごとに v^2 がちょうど $2\mu g d$ ずつ減るのである。よって $w_i = k - i$ であり、$w_n = 0$ から

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

を得る。これは単にエネルギーの話である。はじめの運動エネルギー（kinetic energy）$\frac{1}{2}mv^2$ が、合計の距離 nd にわたって摩擦によってすべて散逸するので、$\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g\, nd$ となる。

検算

- $r = \mathrm{e}^{-1}$ として $w_3 = 0$ から漸化式を逆向きにたどると、$w_2 = 1$、$w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$、$w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$ となる。公式からは $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$ が得られ、確かに一致する。
- $r \to 1$ のとき $r^{-2} - 1 \approx 2(1-r)$、$\ln(1/r) \approx 1 - r$ なので、一般の公式は $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$ に近づき、$r = 1$ の場合の答えと一致する。
- k は無次元量（dimensionless）であり（v^2 も gd も速さの 2 乗の次元をもつ）、n が無次元であることと整合する。
- μ、d、r、v を無作為に選んで運動を数値的に追跡すると、漸化式が高い精度で成り立つことが確かめられる。

よくある間違い

- v_i^2 に対して反発の法則を r^2 ではなく r 倍として適用してしまうこと。反発の法則は速さについての法則なので、速さの 2 乗には r^2 が掛かり、摩擦の項にも同じく r^2 が掛かる。
- n が数えているのは横断の回数であって、跳ね返りの速さが 0 でない衝突の回数ではないことを忘れること。条件は $v_0 = v$ のもとで $v_n = 0$ である。

STEP のその先へ

漸化式 $w_{i+1} = aw_i + b$ は最も単純な線形差分方程式（linear difference equation）であり、不動点を引くという工夫は、線形微分方程式（linear differential equation）で学ぶ「余関数（complementary function）と特解（particular solution）の和」という方法そのものである。このような跳ね返りの問題（床で弾むボールが典型例である）は、エネルギー散逸（energy dissipation）の好例であり、また摩擦がない場合には有限の時間内に無限回の事象が起こる例ともなっている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、衝突と摩擦がより深く扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。