解答例

STEP I 2013、第 1 問

純粋数学 ・ 平方根を含む方程式

> **STEP I 2013、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q1

鍵となる考え方

どの方程式も、姿を変えた二次方程式（quadratic）である。平方根（square root）を y とおき、残りをすべて y で表せば、y についての普通の二次方程式が得られる。注意すべき点はただ一つ、平方根は決して負にならないので $y \geq 0$ だということである。この条件こそが、毎回、見かけの解（spurious root）を捨てる根拠になる。

解答

小問 (i)

$y = \sqrt{x}, y \geq 0$ とおくと $x = y^2$ であり、方程式は

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

となる。解の公式（quadratic formula）により

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

である。マイナスの符号をとると負の値となり、平方根としてはありえない。$\sqrt{11} > 3$ であるから、プラスの符号をとると $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$ となり、これが唯一の候補である。よって

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

である。$y \geq 0$ がわかっていれば各段階は逆にたどれる（可逆である（reversible））ので、これは確かに（唯一の）実数解である。

小問 (ii)(a)

ここでは平方根の中身は $x+2$ なので、$y=\sqrt{x+2}, y\geq 0$ とおくと $x=y^2-2$ となる。方程式は

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

となる。$y\geq 0$ であるから $y=-12$ は不適であり、$y=2$、したがって $x=2^2-2=2$ である。

検算：$2+10\sqrt{4}-22=0$。唯一の実数解は $x=2$ である。

> **考えてみよう** $y=-12$ を残していたら、どうなっていただろうか。

このとき $x=144-2=142$ となるが、$142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$ である。値 $y=-12$ は関連する方程式 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$ の解であり、不用意に両辺を二乗すると、こちらの方程式まで一緒に解いてしまうことになる。条件 $y\geq 0$ こそが、この二つを区別するものである。

小問 (ii)(b)

今回は置換（substitution）が示されていないので、自分で見つける必要がある。根号の中の式は

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

であり、x^2-4x は根号の外にも現れている。これが手がかりである。

> **考えてみよう** ここで y とすべきなのは x^2-4x だろうか、それとも平方根全体だろうか。

y を平方根全体とすれば、方程式は根号を含まない二次方程式になる。$y=\sqrt{2x^2-8x-3}, y\geq 0$ とおく。すると $y^2=2(x^2-4x)-3$ であるから

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

である。これを方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

$y\geq 0$ であるから $y=3$ でなければならない。よって

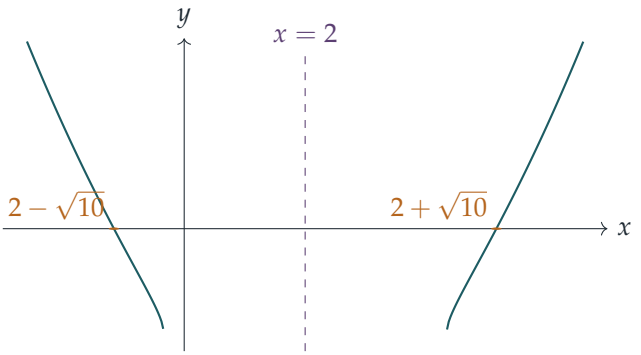
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

である。どちらの値でも $2x^2 - 8x - 3$ は正の数 9 に等しくなるので、平方根は定義され、その値は 3 である。したがって両方とも真の解であり、実数解は

$$x = 2 + \sqrt{10} \quad \text{および} \quad x = 2 - \sqrt{10}.$$

である。方程式は $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ を通してのみ x に依存するので、当然ながら、この二つの解は $x = 2$ に関して対称である。

左辺のグラフを見るとこのことがわかる。左辺は $2x^2 - 8x - 3 \geq 0$ となるところ、すなわち $x \leq 2 - \sqrt{5.5}$ または $x \geq 2 + \sqrt{5.5}$ でのみ定義され、それぞれの枝で一度ずつ零を横切る。



検算

- 小問 (i)：$x = \frac{1}{2}(10 - 3\sqrt{11}) \approx 0.02506$ であるから $\sqrt{x} \approx 0.1583$ であり、$x + 3\sqrt{x} \approx 0.02506 + 0.47494 = 0.5$ となる。
- 小問 (ii)(b)：$x = 2 + \sqrt{10} \approx 5.1623$ のとき $x^2 - 4x = 6$, $2x^2 - 8x - 3 = 9$ であるから、左辺は $6 + 3 - 9 = 0$ となる。不適とした値 $y = -5$ では $x^2 - 4x = 14$ が必要となり、そのとき左辺は $14 + 5 - 9 = 10 \neq 0$ である。
- 各左辺をその定義域（domain）全体で数値的に調べると、上の解がちょうど見つかり、それ以外の解はない。

よくある間違い

- y についての二次方程式の負の解を残してしまう。平方根は決して負にならないので、その解からは方程式の解は得られない。
- (ii)(b) でいきなり両辺を二乗してしまう。すると四次方程式（quartic）になってずっと難しくなるうえ、余分な解が入り込み、それらを一つひとつ確かめなければならなくなる。

► (ii)(a) で、x が y^2 ではなく $x = y^2 - 2$ であることを忘れる。

STEP のその先へ

新しい変数を導入して、難しい方程式をなじみのある方程式に変えることは、数学で最も役に立つ習慣の一つである。(ii)(b) では方程式は $x^2 - 4x$ のみに依存するので、$(x-2)^2$ の関数である。このような対称性（symmetry）を見抜き、それによって変わらない量を用いて考えるという発想は、ガロア理論（Galois theory）で再び登場する。そこでは、対称性によって固定される解の式を見つけることで多項式（polynomial）方程式を解くのである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方へのやさしい入門書である。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）が素晴らしい（しかも無料である）。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。