解答例

STEP III 2012、第 9 問

力学 ・ 回転する滑車の力学

STEP III 2012、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

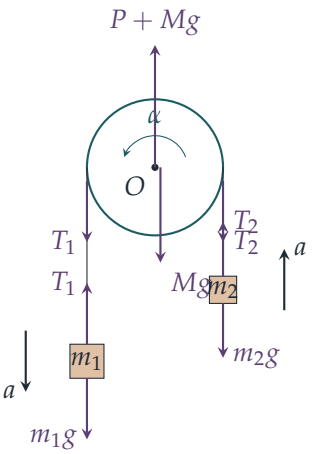
step.maths.org/questions/12-s3-q9

鍵となる考え方

手がかりは、測定された軸にはたらく力である。滑車の重心（centre of mass）は動かないので、軸は滑車の重さを支えるとともに、糸の 2 つの張力（tension）とも釣り合わなければならない。このことから P は張力の和となり、そこから質点の加速度が求まる。加速度がわかれば、滑車の回転の運動方程式から慣性モーメント（moment of inertia）が得られる。摩擦偶力（friction couple）が変えるのはこの 1 つの方程式だけで、ほかには何も変えない。

解答

モデル。質点は大きさのない質点とし、糸は軽く伸び縮みしないとする。糸は滑車の上を滑らないので、糸の速さは円板の縁の速さに等しい。系は静止状態から放されたものとし、したがって重い方の質点 m_1 が下降する。m_1 の下向きの加速度を a とする。これは m_2 の上向きの加速度でもある。このとき滑車の角加速度（angular acceleration）は $\alpha = a/r$ である。張力は m_1 側の糸で T_1、m_2 側で T_2 とする（滑車に慣性があるので、この 2 つは異なる）。軸のまわりの慣性モーメントを I とする。



各質点にニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用すると

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a,$$

となるので

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

軸にはたらく力。滑車の重心は固定された点 O にあるので、滑車にはたらく力の合力はゼロである。滑車にはたらく力は、重さ Mg、2 つの張力（糸は両側とも鉛直に垂れているので、どちらも下向きに引く）、そして軸からの力である。摩擦偶力（小問 (ii) で加える）は合力をもたないので、ここには入ってこない。したがって軸にはたらく鉛直方向の力は $Mg + T_1 + T_2$ であり、測定値と比べると

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

となるので

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

これは測定値と質点の運動方程式しか用いていないので、どちらの小問でも成り立つ。

小問 (i)

軸に摩擦がなければ、O のまわりにモーメント（moment）をもつのは張力だけである。軸のまわりのモーメントを考えると

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{よって} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

ここで $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$ であるから

$$I = r^2 \left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2) \right).$$

a に (1) を代入すると

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right) \\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P} \\ &= \frac{((m_1+m_2)P-4m_1m_2g)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

となる。ここで $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$ を用いた。これが $(*)$ であり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

新たに計算される値を I' とする。摩擦偶力 C は回転を妨げる向きにはたらき、回転は T_1 によって駆動される向きなので、モーメントの式は次のようになる。

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

加速度は依然として (1) で与えられる。同じ測定値 P を用いており、軸にはたらく力についての議論には C が関わらないからである。したがって T_1-T_2 と a は小問 (i) とまったく同じであり

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

? **考えてみよう** a の符号はどうしてわかるのだろうか？

系は静止状態から動き出し、滑車は m_1 が下がる向きに回るので、m_1 の下向きの加速度は正でなければならない。（もし a がゼロまたは負であれば、m_1 は決して下向きに動き始めない。）よって $a>0$ である。$C>0$ かつ $r>0$ なので $Cr/a>0$ となり、**摩擦を考慮して計算した値は** $(*)$ **より小さい**。これは理にかなっている。張力による正味のトルク（torque）の一部が摩擦に打ち勝つために使われるので、同じ観測された加速度を説明するのに必要な慣性はより小さくなるのである。

C の上限。張力をモーメントの式に代入すると

$$((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a)r-C=\frac{I'a}{r},$$

となり、これを整理すると

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

右辺では $a>0$、$I'\geq 0$（慣性モーメントは負になりえない）、$(m_1+m_2)r>0$ であるから、右辺は正である。したがって

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

となり、示すべきことが示された。言葉で言えば、摩擦偶力は釣り合っていない重さによる偶力 $(m_1 - m_2)gr$ より小さくなければならない。そうでなければ、系はそもそも動き出さないのである。

検算

- **軽い滑車：**$I = 0$ かつ $C = 0$ ならば $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$（おなじみのアトウッドの器械（Atwood machine）の結果）であり、$P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ となる。このとき $(*)$ の分子は当然ながら消える。
- **静止した滑車：**$a \to 0$ のとき $P \to (m_1 + m_2)g$ となり、$(*)$ の分母はゼロに近づき、$(*)$ は発散する。無限に重い滑車は加速しない。
- **数値による確認：**$g = 9.8$、$m_1 = 3$、$m_2 = 1$、$r = 0.5$、$I = 0.7$、$C = 2$（SI 単位）とすると、実際の運動では $a \approx 2.29\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$P \approx 34.6\,\mathrm{N}$ である。式 $(*)$ からは $I \approx 1.14$ が得られ、ちょうど $Cr/a \approx 0.44$ だけ大きすぎる。一方、摩擦を含むモデルからは 0.7 が正しく得られる。ここでは $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$ である。同様の方法で 10^4 個のランダムな場合を検証した。

よくある間違い

- 張力が両側で同じだとしてしまうこと。これが成り立つのは軽い滑車、または摩擦のない滑車の場合だけであり、ここでそうすると問題から I が消えてしまう。
- 軸にはたらく力に滑車自身の重さを入れ忘れること。測定値が $P + Mg$ と書かれているのはこのためである。
- 摩擦偶力が軸にはたらく力を変えると考えること。偶力の合力はゼロなので、どちらの小問でも $P = T_1 + T_2$ である。

STEP のその先へ

これは**測定値から隠れたパラメータを推定する**ことの小さな例である。答えは仮定するモデルに依存し、摩擦を無視すると推定値は予測可能な方向に偏る。大学 1 年の力学では、剛体（rigid body）は運動量（momentum）と角運動量（angular momentum）の理論一式を用いて扱われ、一般の軸のまわりに回転する物体に対しては慣性モーメントはテンソル（tensor）となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、固定軸のまわりの回転や、質量のある滑車をもつアトウッドの器械が詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。