解答例

STEP III 2012、第 8 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の望遠鏡和

> **STEP III 2012、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

鍵となる考え方

(ii) の式は n が 1 増えるたびに符号が変わる。小問 (i) は、まさにそのような規則性（pattern）を探すよう促すヒントである。奇数の n に対する値がわかれば、(iii) の逆正接（arctan）の恒等式は $\tan(A-B)$ の公式を言い換えたものにすぎない。この恒等式を変形すると、級数の各項が二つの逆正接の**差**として書けるので、和は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合う。

解答

最初のいくつかの項は次のとおりである。

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

小問 (i)

これらの値を用いると、

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

となるので、求めるとおり二つの式は等しい。

小問 (ii)

$G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$ とおく。小問 (i) は $G_0 = G_2$ を示しており、これは G_{n+1} と G_n を比べてみることを示唆している。漸化式（recurrence）を $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$ の

形で用いると、

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

となる。ここで 4 行目では、再び漸化式 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$ を用いた。

したがって G_n は 1 段ごとに符号が変わる。小問 (i) より $G_0 = -1$ であるから、(n に関する数学的帰納法（induction）により）$G_n = (-1)^{n+1}$ が従う。二つの場合を書くと次のようになる。

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & n \text{ が偶数のとき、} \\ 1 & n \text{ が奇数のとき。} \end{cases}$$

たとえば $n = 1$ のときは $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$ であり、$n = 4$ のときは $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$ である。

小問 (iii)

$r \geq 1$ を固定し、

$$\alpha = \arctan \frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{F_{2r+1}}.$$

とおく。$k \geq 1$ であるすべての F_k は正の整数なので、これらはきちんと定義される。加法定理（compound-angle formula）により、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

となる。ここで $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$ を用いた。次に、**奇数**の値 $n = 2r - 1$ に対して小問 (ii) を適用すると、

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{よって} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

$F_{2r-1} \geq 1$ より、これは 0 でないので約分できる。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

考えてみよう 正接が等しくても、角が等しいとは限らない。なぜ $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$ と結論してよいのだろうか。

tan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で単射（one-to-one）であるから、両方の角がこの区間に属することを確かめれば十分である。$1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$ であるから $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ となり、したがって $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$ である。また、$\arctan(1/F_{2r+2})$ は定義により $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。ゆえに

$$\arctan \frac{1}{F_{2r}} = \arctan \frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

が成り立ち、これが求める恒等式である。

和の計算。この恒等式を変形すると

$$\arctan \frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan \frac{1}{F_{2r}} - \arctan \frac{1}{F_{2r+2}},$$

となるので、部分和（partial sum）は次のように打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \arctan \frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan \frac{1}{F_2} - \arctan \frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan \frac{1}{F_4} - \arctan \frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan \frac{1}{F_{2N}} - \arctan \frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan \frac{1}{F_2} - \arctan \frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

ここで $F_2 = 1$ を用いた。$n \ge 2$ のとき $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$ であるから、$F_n \to \infty$ である。すると $1/F_{2N+2} \to 0$ となり、arctan は連続（continuous）で $\arctan 0 = 0$ であるから、$N \to \infty$ とすると

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

が得られる。

検算

- $r = 1$ のとき、恒等式は $\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ となる。右辺の tan は $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/(1 - \frac{1}{6}) = 1$ であるから、これはよく知られた $\frac{\pi}{4}$ の恒等式である。
- 最初の 3 項は $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$ であり、$\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{21} \approx 0.7378$ と一致する。
- 数値的には、級数の 89 項の和は $0.785398163\ldots$ となり、計算機の精度の範囲で $\frac{\pi}{4}$ と一致する。また、小問 (ii) の公式は $n < 150$ のすべての n について厳密に成り立つ。

よくある間違い

- 小問 (iii) で (ii) の偶数の場合を使ってしまう。そこでの添字は $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$ であるから、$n=2r-1$ は奇数であり、値は $+1$ である。
- 両方の角が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属することを確かめずに、正接が等しいことから角が等しいと結論してしまう。
- 打ち消し合った後の和の最初の項を誤る。それは $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$ であって、$\arctan(1/F_1)$ ではない。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、カッシーニ（Cassini）の恒等式（Cassini's identity）$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ の親戚である。どちらも行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を通して理解するのがよい。この行列の n 乗の成分はフィボナッチ数（Fibonacci numbers）であり、行列式（determinant）をとればただちにカッシーニの恒等式が得られる。望遠鏡和、そして部分和から極限へ移るときに必要な注意深さは、解析学（analysis）の最初の講義の定番の題材である。これらについて読むには Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）がよく、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には漸化式に関する STEP 風の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。