解答例

STEP III 2012、第 7 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP III 2012、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q7

鍵となる考え方

連立した 2 つの 1 階微分方程式（coupled first-order equations）は、変数を 1 つ消去すれば 1 つの 2 階微分方程式になる。$\dot{y}$ の式を微分し、さらに第 1 式そのものを使って z を y と $\dot{y}$ で表せばよい。あとは、各小問で定数 A と B を選ぶだけである。小問 (iii) では無限和が 2 つの等比級数（geometric series）になり、その結果を小問 (ii) と比べると c が決まる。物理的には、z_2 は単位時間ごとに同じ量の注射を 1 回ずつ行ったときに到達する定常状態（steady state）である。

解答

一般解

$\dot{y} = -2y + 2z$ を微分し、$\dot{z}$ に第 2 式を代入すると、

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

第 1 式から、z は y を用いて次のように表される。

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{したがって} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

これを代入すると、

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

補助方程式（auxiliary equation）$m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$ の解は $m = -1$ と $m = -6$ であるから、

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

となる。ここで A と B は任意定数である。次に、$z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ から z が求まる。

$$z = Ae^{-t}(1 - \tfrac{1}{2}) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

となり、題意が示された。

考えてみよう y の方程式を導くには両方の式を使ったが、z を求めるには第 1 式しか使っていない。求めた組は本当に第 2 式も満たしているだろうか。

満たしている。$z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ とすると、$\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$ である。また $-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$ であり、両者は一致する。したがって、連立方程式のすべての解はこの形をもち、逆にこの形の組はすべて解である。

小問 (i)

$t = 0$ において $y(0) = A + B$、$z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$ である。条件より

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

であるから $A = 4B$ となり、$5B = 5$ を得る。よって $B = 1$、$A = 4$ であり、

$$y = 4e^{-t} + e^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-6t}.$$

薬ははじめ血液中にあり、脳内の量は 0 から増加したのち、吸収されるにつれて減衰していく。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}A$、$b = 2B$ とおくと、$z = ae^{-t} - be^{-6t}$ となる。条件は

$$a - b = c, \qquad ae^{-1} - be^{-6} = c.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $a(1 - e^{-1}) = b(1 - e^{-6})$ を得る。この共通の値を k とおくと、

$$a = \frac{k}{1 - e^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - e^{-6}}, \qquad \text{かつ} \qquad c = a - b = kC,$$

ただし

$$C = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-6}}.$$

である。$e^{-1} > e^{-6}$ より $1 - e^{-1} < 1 - e^{-6}$ であるから、$C > 0$ である。特に $C \neq 0$ なので、これで割ることができ、$k = c/C$ を得る。（同じことだが、2 つの 1 次方程式の行列式（determinant）は $e^{-1} - e^{-6} \neq 0$ であるから、解はただ 1 つに定まる。）したがって

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-6t}}{1 - e^{-6}}\right),$$

$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-1}} + \frac{e^{-6t}}{2(1 - e^{-6})}\right),$$

である。ここで y_2 は $A = 2a$ と $B = \frac{1}{2}b$ から得られる。

小問 (iii)

$m = -n$ とおくと、m は $0, 1, 2, \ldots$ を動き、$t - n = t + m$ となる。小問 (i) を用いると、

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} (2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m).$$

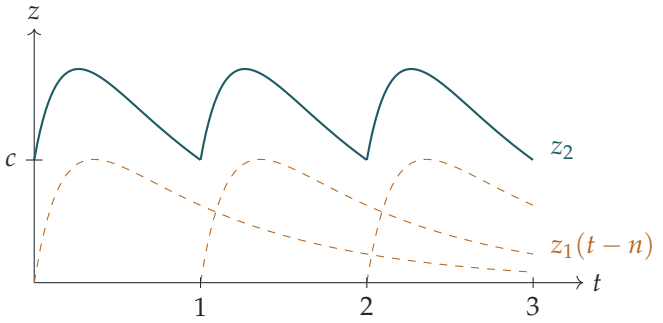
2 つの部分はどちらも等比級数で、公比 e^{-1} と e^{-6} はともに 0 と 1 の間に（等号なしで）ある。よってそれぞれ収束（converge）し、別々に和をとってよい。

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

これはちょうど $z_2(t)$ の括弧内を 2 倍したものである。したがって、$0 \le t \le 1$ でこの恒等式が成り立つのは $c/C = 2$ のとき、すなわち

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

のとき、かつそのときに限る。（それ以外の c では、両辺の差は同じ o でない関数の o でない定数倍になるので、条件を満たす値はこれだけである。）



この図がその意味を表している。時刻 n に血液中へ量 5 を注射すると、脳内の量は曲線 $z_1(t-n)$（破線）を描く。はるか過去からすべての整数時刻に注射を行うと、脳内の量はこれらすべての応答の和になる。その和は単位時間ごとに同じ形を繰り返し（実線）、$[0, 1]$ 上ではこの値の c に対する z_2 に一致する。

検算

▶ 小問 (i) では $z_1(0) = 2 - 2 = 0$、$y(0) = 4 + 1 = 5$ である。

- 小問 (iii) では、$z_2(0)$ と $z_2(1)$ はともに c に等しくなるはずである。和において、$t = 1$ の級数は $t = 0$ の級数から初項を除いたものであり、その初項は $z_1(0) = 0$ である。これにより、計算をしなくても $z(0) = z(1)$ が確かめられる。
- $c = 2C$ のとき $y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$ である。つまり、各周期で血液はちょうど 1 回分の投与量を失い、それを次の注射が補っている。
- 数値的には $c \approx 1.15898$ である。$t = 0.37$ において $z_1(t + m)$ を 200 項まで足すと $1.967693\ldots$ となり、$z_2(0.37)$ と小数第 12 位まで一致する。

よくある間違い

- z が $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ によって y から決まることを忘れ、新たな独立した定数を用いて z についての別の方程式を解いてしまう。
- 小問 (iii) でずらす向きを取り違える。$n \leq 0$ は $t - n \geq t$ を意味するので、寄与するのは過去の投与だけである。

STEP のその先へ

これは線形コンパートメントモデル（linear compartment model）であり、2×2 行列 M を用いて $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$ と書ける。減衰率 1 と 6 は M の固有値（eigenvalues）の符号を変えたものであり、これは大学 1 年次の講義で学ぶ、線形系に対する行列指数関数（matrix exponential）の見方である。小問 (iii) は重ね合わせ（superposition）の簡単な例である。すなわち、繰り返されるインパルスに対する応答は、1 つのインパルス応答（impulse response）をずらしたものの和になる。この考え方はグリーン関数（Green's functions）や畳み込み（convolution）へとつながる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、線形連立微分方程式とインパルス応答を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。