解答例

STEP III 2012、第 6 問

純粋数学 • 複素数の根の軌跡

> **STEP III 2012、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

鍵となる考え方

複素数が 0 であるのは、その実部（real part）と虚部（imaginary part）がともに 0 であるとき、かつそのときに限る。したがって、$z = x + \mathrm{i}y$ に関する 1 つの複素数の方程式は、x、y、p に関する 2 つの実数の方程式になる。虚部の方程式は常に因数 y をもつように因数分解でき、これによってどの軌跡も「実数解」と「虚数解」に分かれる。それぞれの場合に p を消去して (x, y) 平面上の曲線を求め、その曲線上のどの点が実際に実数の p から得られるのかを確かめる。

解答

第 1 の方程式 $z^2 + pz + 1 = 0$

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

p は実数であるから、2 つの括弧はそれぞれ実部と虚部であり、ともに 0 でなければならない：

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

これが示すべき式である。

第 2 式より、$p = -2x$ または $y = 0$ である。$y = 0$ ならば、第 1 式は $x^2 + px + 1 = 0$ となる。ここで $x \neq 0$ である。なぜなら $x = 0$ とすると $1 = 0$ となってしまうからである。よって x で割ることができ、$p = -(x^2 + 1)/x$ を得る。したがって、$p = -2x$ であるか、または $x \neq 0$ のもとで $p = -(x^2 + 1)/x$ である（後者の場合は $y = 0$）。

解の軌跡。 $p=-2x$ の場合。実部の方程式に代入すると $x^2-y^2-2x^2+1=0$、すなわち

$$x^2+y^2=1.$$

逆に、単位円上の任意の点 $x+\mathrm{i}y$ をとり、$p=-2x$ とおくと、これは実数である。このとき $(2x+p)y=0$ かつ $x^2-y^2+px+1=1-x^2-y^2=0$ となるので、この点は解である。よって単位円全体が軌跡に含まれる。

$y=0$、$p=-(x^2+1)/x$ の場合。 $x\neq 0$ であるすべての実数 x に対してこの p は実数であり、x は $x^2+px+1=0$ の解である。点 $x=0$ は決して解にならない。$0^2+p\cdot 0+1=1$ だからである。

したがって、解の軌跡は原点を除いた実軸と単位円 $|z|=1$ を合わせたものである（点 ± 1 は両方に属する）。

第2の方程式 $pz^2+z+1=0$

$z=x+\mathrm{i}y$ とすると、実部と虚部から

$$p(x^2-y^2)+x+1=0,\qquad (2px+1)y=0.$$

原点は決して解にならない。$z=0$ とすると $1=0$ となるからである。

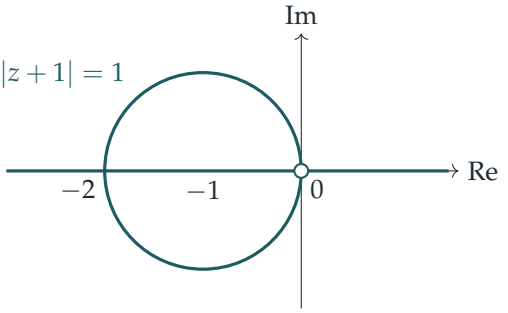
$y=0$ の場合。このとき $x\neq 0$ のもとで $px^2+x+1=0$ であるから、$p=-(x+1)/x^2$ である。これは $x\neq 0$ であるすべての実数 x に対して実数となるので、原点を除く実軸上のすべての点が軌跡に含まれる（$x=-1$ のときは $p=0$ となり、方程式は1次方程式 $z+1=0$ になるが、その解は確かに -1 である）。

$2px+1=0$ の場合。このとき $x\neq 0$ であり、$p=-1/(2x)$ である。実部の方程式に代入して $-2x$ を掛けると

$$(x^2-y^2)-2x^2-2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2+2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2+y^2=1.$$

逆に、この円上の原点以外の任意の点では $x\neq 0$ であるから $p=-1/(2x)$ は実数であり、上の式変形を逆にたどれば両方の方程式が成り立つことがわかる。

したがって、解の軌跡は実軸と円 $|z+1|=1$（中心 -1、半径 1）を合わせたものから、両方に属する原点を除いたものである。



白丸は除かれた点 $z=0$ を表す。

考えてみよう この軌跡が第 1 の軌跡を裏返したような形をしているのはなぜか？

z が $pz^2+z+1=0$ の解ならば、$w=1/z$ は $w^2+w+p=0$ を満たす。写像 $z\mapsto 1/z$ は（0 を除いた）実軸をそれ自身に移し、$w^2+w+p=0$ の虚数解が乗る直線 $\mathrm{Re}\,w=-\frac{1}{2}$ を、原点を通る円 $|z+1|=1$ に移す。原点が除かれるのは、それが $w=\infty$ に対応するからである。

第 3 の方程式 $pz^2+p^2z+2=0$

$p=0$ ならば方程式は $2=0$ となり解をもたないので、以下では常に $p\neq 0$ である。実部と虚部から

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0,\qquad p(2x+p)y=0,$$

を得る。$p\neq 0$ であるから、第 2 式は $(2x+p)y=0$ となる。

$p=-2x$ の場合。 $p\neq 0$ であるから $x\neq 0$ である。代入すると

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

逆に、この曲線上の任意の点では $x\neq 0$ であるから $p=-2x$ は 0 でない実数であり、式変形を逆にたどればその点が解であることがわかる。$x^2+y^2>0$ であるから、この曲線上では $x<0$ である。曲線を

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

と書き直すと、$-1/x\geq x^2$ が必要である。$x<0$ を掛けると不等式（inequality）の向きが逆になり $-1\leq x^3$ となるので、$-1\leq x<0$ である。この曲線は -1 を通り（そこで $y=0$）、実軸に関して対称であり、$x\to 0^-$ のとき $y^2\to\infty$ となるので、虚軸が漸近線（asymptote）である。また $x<0$ に対して $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$ であるから、x が -1 から 0 へ進むにつれて $|y|$ は単調に増加する。極形式で表すと、この曲線は $r^3\cos\theta=-1$ である。

$y = 0$ の場合。このとき実数 x が軌跡に含まれるのは、$xp^2 + x^2p + 2 = 0$ を満たす実数 p が存在するときである。$x = 0$ に対してはこれは $2 = 0$ となるので、0 は軌跡に含まれない。$x \neq 0$ に対してはこれは p の 2 次方程式であり、実数解をもつのは判別式（discriminant）が 0 以上のとき、かつそのときに限る：

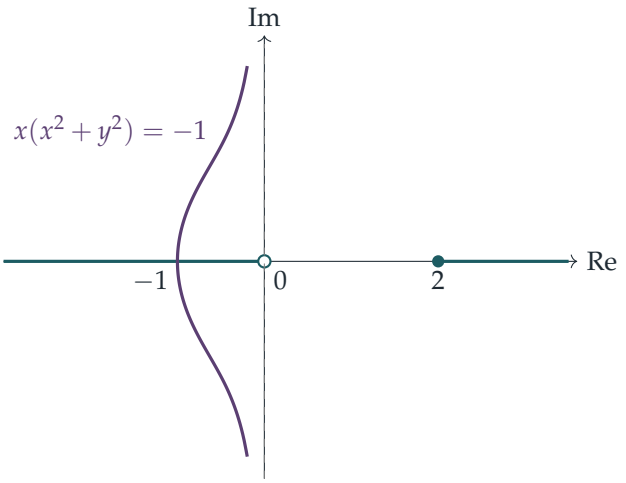
$$x^4 - 8x = x(x^3 - 8) \geq 0.$$

これは $x < 0$ のとき（両方の因数が負）または $x \geq 2$ のとき（両方の因数が 0 以上）に成り立ち、$0 < x < 2$ では成り立たない。このようにして得られる実数 p は自動的に 0 でない。$p = 0$ とすると $2 = 0$ となるからである。たとえば $x = 2$ に対しては $2p^2 + 4p + 2 = 0$ が必要であり、$p = -1$ となる。実際、$-z^2 + z + 2 = -(z-2)(z+1)$ である。

考えてみよう ここで x ではなく p について解くのはなぜか？

知りたいのはどの点 x が到達可能かであるから、x が与えられたものであり、p が未知数である。方程式は p について 2 次であり、実数解が存在することはちょうど x に関する判別式の条件になる。

したがって、解の軌跡は負の実軸、実軸上の半直線 $x \geq 2$、および -1 から虚軸に向かって上下両方向に伸びる曲線 $x(x^2 + y^2) = -1$ からなる。



この曲線は -1 においてのみ実軸と交わり、そこでの接線は垂直である。また $|y| \to \infty$ のとき虚軸に近づく。

検算

- $z^2+pz+1=0$ では解の積が 1 であるから、虚数解は共役複素数 $z, \bar{z}$ であり、$|z|^2=1$ を満たす。ここでも単位円が得られる。
- 第 3 の方程式で $p=-1$ とすると解は 2 と -1 であり、これは半直線の端点と曲線の頂点である。$p=1$ とすると $z^2+z+2=0$ となり、その解は $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$ である。このとき $x(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$ となり、確かに成り立つ。
- 数値的に、10^5 個のランダムな p の値に対して 3 つの方程式すべてを解き、すべての解が述べた軌跡上にあることを確認した。また、各軌跡上のランダムな点が述べた p によって実際に得られることも確認した。さらに p を細かく走査したところ、第 3 の方程式は $(0,2)$ に実数解をもたず、正の実数解の最小値は 2.0 であった。

よくある間違い

- 逆の確認を忘れること。p を消去して得られる曲線は軌跡を**含む**ものであり、さらに各点が実数の p によって到達されることを示す必要がある。第 3 の方程式では、$(0,2)$ の実数の点は $y=0$ を満たすが、決して到達されない。
- x や p で割るときに、それが 0 でない理由を述べないこと。原点が除かれる理由はまさにここにある。
- $p=0$ の扱いを雑にすること。第 2 の方程式では $p=0$ は正真正銘の解 -1 を与えるが、第 3 の方程式では解をまったく与えない。

STEP のその先へ

根軌跡（root locus）は制御工学における標準的な道具である。ゲインと呼ばれるパラメータを変化させると、系の極が曲線に沿って動き、系の安定性はそれらが右半平面に入り込むかどうかで決まる。この問題はまた、写像 $z\mapsto 1/z$ の幾何学も示唆している。この写像は直線や円を直線や円に移す。これはメビウス変換（Möbius transformation）の理論の出発点であり、Needham, *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）に美しく図解されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。