解答例

STEP III 2012、第 5 問

純粋数学 • 2 次曲線上の有理点

STEP III 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q5

鍵となる考え方

(i)(b) の恒等式（identity）は、姿を変えた回転（rotation）である。点 $(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)$ は、点 $(1, -\sqrt{m})$ を角 θ だけ回転して得られる点であり、したがって半径 $\sqrt{1+m}$ の円の上にとどまる。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ がともに有理数（(i)(a) で得た $\frac{3}{5}$ と $\frac{4}{5}$ など）であれば、この回転は「よい」点を別の「よい」点に移す。(ii) はすべて同じ手法を、適当な整数点から出発して使うものであり、双曲線（hyperbola）の場合には回転をその双曲線版に取りかえればよい。

解答

小問 (i)

(a) 点 $(1,0)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 上の整数有理点（integer rational point）である。非整数のものを得るには、辺の比が 3,4,5 の三角形を用いる。$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$ であるから、$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ が条件を満たし、どちらの座標も整数ではない。

(b) 点 $(1,1)$ は $x^2 + y^2 = 2$ 上の整数有理点である。

展開すると、交差項は $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ と $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ となって打ち消し合うので、

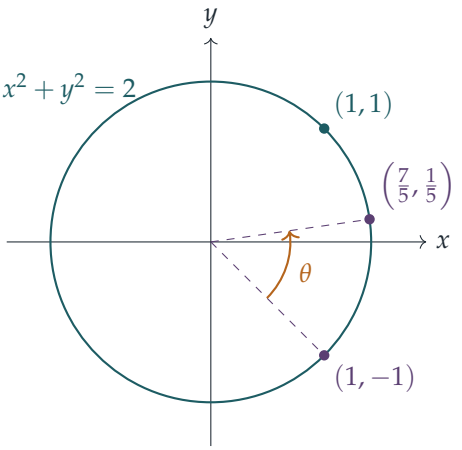
$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta)^2 + (\sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta + m\sin^2\theta + \sin^2\theta + m\cos^2\theta \\ &= (1+m)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + m.\end{aligned}$$

$m = 1$ とすると右辺は 2 となる。さらに $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ となる θ を選ぶ（$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

は単位円（unit circle）上にあるので、これは可能である）。すると

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

は $x^2 + y^2 = 2$ を満たす。実際、$\frac{49+1}{25} = 2$ である。よって $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ は $x^2 + y^2 = 2$ 上の非整数の有理点である。



図は何が起きたかを示している。$\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ である角 θ だけ $(1, -1)$ を反時計回りに回転すると、$\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ に移る。

小問 (ii)

(a) $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ であるから、点 $(1, \sqrt{2})$、すなわち $p = 1$、$q = 0$、$r = 0$、$s = 1$ は、$x^2 + y^2 = 3$ 上の整数 2-有理点（2-rational point）である。

非整数のものを得るには、(i)(b) の恒等式を $1 + m = 3$ となるように $m = 2$ として用い、再び $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$ とする。

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

このとき $p = \frac{3}{5}$、$q = \frac{4}{5}$、$r = \frac{4}{5}$、$s = -\frac{3}{5}$ であり、いずれも整数ではなく、恒等式より $x^2 + y^2 = 3$ が成り立つ。直接確かめると、$x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$、$y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$ であり、その和は $\frac{75}{25} = 3$ となる。

考えてみよう 恒等式からは $1 + m$ しか得られず、しかも m には $\sqrt{2}$ が関わらなければならないのに、どうすれば 11 に到達できるだろうか？

出発点を拡大すればよい。恒等式は $(1, -\sqrt{m})$ を回転して得られたものであったが、同様に任意の点 $(a, -b\sqrt{2})$ を回転してもよい。交差項が同じように打ち消し合い、

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

したがって $a^2+2b^2=11$ を満たす整数が必要であり、$a=3$、$b=1$ がこれを満たす $(9+2=11)$。言いかえれば、$x^2+y^2=11$ 上の整数 2-有理点 $(3,\sqrt{2})$ から出発するのである。

(b) $a=3$、$b=1$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$、$\sin\theta=\frac{4}{5}$ とすると、

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

よって $p=\frac{9}{5}$、$q=\frac{4}{5}$、$r=\frac{12}{5}$、$s=-\frac{3}{5}$ であり、いずれも整数ではなく、$x^2+y^2=11$ が成り立つ。直接確かめると、$x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$、$y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$ であり、その和は $\frac{275}{25}=11$ となる。

(c) 双曲線に対しては、x^2+y^2 ではなく x^2-y^2 を保つ「回転」が欲しい。$c^2-s^2=1$ $(c=\cosh t$、$s=\sinh t$ と考えればよい）ならば、

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2&=a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\&=(a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

となる。交差項 $2\sqrt{2}\,abcs$ がここでも打ち消し合うからである。$a^2-2b^2=7$ が必要であるから、$a=3$、$b=1$ とする（したがって $(3,\sqrt{2})$ はこの双曲線上の整数 2-有理点である)。

次に、$c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$ を満たす有理数 c、s が必要である。$c+s=2$、$c-s=\frac{1}{2}$ と選ぶと、$c=\frac{5}{4}$、$s=\frac{3}{4}$ を得る。すると

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

であり、$p=\frac{15}{4}$、$q=\frac{3}{4}$、$r=\frac{9}{4}$、$s=\frac{5}{4}$ はいずれも整数ではない。直接確かめると、$x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$、$y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$ であるから、$x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$ となる。これは $x^2-y^2=7$ 上の非整数の 2-有理点である。

検算

どの点も、上で行ったように分数を用いて正確に確かめられるし、数値的にも確かめられる。(ii)(c) では $x\approx 4.81066$、$y\approx 4.01777$ であり、$x^2-y^2\approx 7.0000$ となる。(ii)(b) では $x\approx 2.93137$、$y\approx 1.55147$ であり、$x^2+y^2\approx 11.0000$ となる。最後には必ず p,q,r,s を見直し、どれも整数でないことを確認すること。

よくある間違い

- 0 が整数であることを忘れる。$\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\ldots\right)$ のような点は $p=0$ であるから、非整数の 2-有理点ではない。

▶ (c) では、一見問題なさそうな選び方がうまくいかないことがある。$c = \frac{5}{3}$、$s = \frac{4}{3}$ も $c^2 - s^2 = 1$ を満たすが、$x = 5 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となり、$p = 5$ が整数になってしまう。係数はすべて確認すること。

STEP のその先へ

$p + q\sqrt{2}$ の形の数全体は体（field）$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ をなし、この問題は本質的に、その体の上で円錐曲線（conic）上の点を求める問題である。既知の点を有理的な角だけ回転するという手法は、美しい理論の出発点である。円錐曲線が有理点（rational point）を一つでももてば、その点を通る直線によって他のすべての有理点が媒介変数表示（parametrise）でき、また $x^2 - 2y^2 = 1$（ペル方程式（Pell's equation））の有理点全体は、(c) で用いたまさにその双曲線的な「回転」のもとで群（group）をなす。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）はペル方程式と平方数の和を扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のような体を導入している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。