解答例

STEP III 2012、第 4 問

純粋数学 • 無限級数の和

STEP III 2012、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q4

鍵となる考え方

すべては二つの標準的な級数（series）、$\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$ と $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$ に基づいている。小問 (i) では、n の各多項式を $n!$ と約分できる形に書き直すことが工夫の要である。つまり、n の累乗ではなく、$n(n-1)$ や $n(n-1)(n-2)$ のような積を用いる。小問 (ii) では、部分分数分解（partial fractions）によって扱いにくい有理式の因子を $1/(n+k)$ の形の項に分ける。そしてそれぞれが、添字をずらした対数の級数になる。

解答

小問 (i)

二つの事実ですべてが片づく。第一に、$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$ であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

第二に、任意の整数 $k \geq 1$ に対して、項 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$ は $n < k$ のとき 0 となり、$n \geq k$ のとき $1/(n-k)!$ に等しい。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

ここに現れる級数はすべて絶対収束（absolute convergence）する（いずれも n の多項式を $n!$ で割ったものである）から、自由に分けたり組み合わせたりしてよい。

一つ目の和。 $n+1=n+1$ であるから、$k=1$ として $(*)$ を用いると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=2\mathrm{e}-1,$$

となり、示すべき式が得られる。

二つ目の和。 $(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$ と書く。すると $k=2$ と $k=1$ の場合の $(*)$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1,$$

となり、示すべき式が得られる。

三つ目の和。

> **考えてみよう** $(2n-1)^3$ を下降する積 $n(n-1)(n-2)$、$n(n-1)$、n で表すにはどうすればよいか。

展開すると $(2n-1)^3=8n^3-12n^2+6n-1$ である。次に

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,\qquad n^2=n(n-1)+n.$$

を用いる。これらは右辺を展開するか、$n=0,1,2,3$ を代入すれば確かめられる。代入すると

$$\begin{aligned}(2n-1)^3&=8[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n]-12[n(n-1)+n]+6n-1\\&=8\,n(n-1)(n-2)+12\,n(n-1)+2n-1.\end{aligned}$$

（簡単な確認：$n=1$ では両辺とも 1、$n=2$ では両辺とも 27 である。）ここで $k=3,2,1$ の場合の $(*)$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n!}=8\mathrm{e}+12\mathrm{e}+2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=21\mathrm{e}+1.$$

小問 (ii)

部分分数分解。 分子と分母の次数が等しいので、まず割り算を行う。

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n+1}+\dfrac{B}{n+2}$ とおくと、隠蔽法（cover-up rule）により $A=\dfrac{-2}{1}=-2$（$n=-1$ において）、$B=\dfrac{-5}{-1}=5$（$n=-2$ において）を得る。したがって

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}.$$

三つの部分。 $x=\frac{1}{2}$ とおき、$|x|<1$ で成り立つ $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty}x^m/m$ を用いる。以下の三つの級数はいずれも収束する（項は少なくとも 2^{-n} と同じ速さで小さくなる）から、和を分けることは正当である。

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}=2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}=\frac{-\ln(1-x)}{x}=2\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^m}{m}=\frac{-\ln(1-x)-x}{x^2}=4(\ln 2-\tfrac{1}{2})=4\ln 2-2.$$

2 行目と 3 行目では、それぞれ $m=n+1$、$m=n+2$ とおいた。3 行目は、対数の級数全体からその $m=1$ の項 x を取り除いたものである。

> ? **考えてみよう** 三つ目の部分で余分な $-x$ が必要なのはなぜか。

$m=n+2$ と添字をずらすと和は $m=2$ から始まるので、この級数は $-\ln(1-x)$ から初項が欠けたものになる。これを忘れるのが、ここで最も間違えやすい点である。

まとめる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)}=2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2)=12-16\ln 2.$$

検算

- $n=60$ までの部分和（partial sums）は、(i) の三つの和について 4.436564、12.591409、58.083918 となる。これらは計算機の精度の範囲で $2\mathrm{e}-1$、$5\mathrm{e}-1$、$21\mathrm{e}+1$ と一致する。
- (ii) では $12-16\ln 2\approx 0.909645$ であり、部分和と一致する。最初の数項は $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{48}$、$\frac{1}{16}$ であるから、合計が 1 を少し下回るのはもっともらしい。
- (ii) の答えは正でなければならないが、実際そうなっている：$16\ln 2\approx 11.09<12$。

よくある間違い

- $\sum_{n=1}^{\infty}1/n!=\mathrm{e}$ としてしまう。これは $n=0$ の項が欠けていることを忘れている。
- $\sum n^2/n!$ を $\sum n/(n-1)!$ と書いたところで止まってしまう。さらに $n=(n-1)+1$ と分ける必要がある。
- (ii) で、$\sum x^n/(n+2)$ の添字をずらすときに $-x$ を落としてしまう。

STEP のその先へ

下降する積 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ は下降階乗（falling factorial）と呼ばれ、多項式をこれらで表すには第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）を用いる。$(*)$ の和は、平均 1 のポアソン分布（Poisson distribution）の k 次の階乗モーメント（factorial moment）が 1 であることを表している。たとえば $\sum n^k/n!$ が e と第 k ベル数（Bell number）の積になるのはこのためである。ここでの和の組み替えは絶対収束によって正当化されるが、これは大学 1 年の解析学の重要なテーマである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照せよ。確率論の側面については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。