解答例

STEP III 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 接する曲線と 4 次式

> **STEP III 2012、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q3

鍵となる考え方

第 2 式に $y = 4 - x^2$ を代入すると x の 4 次方程式（quartic）が得られ、その解が交点の x 座標である。「接する」とは**重解**（repeated root）をもつことを意味する。m と k を未知数として扱う代わりに、すべてを接点の x 座標 a で表すことにする。すると m、k およびほかのすべての交点が a の簡単な関数になることがわかる。これにより 4 つの概形がそれぞれどうなるべきかが正確にわかり、小問 (ii) は $m = 12$ という特別な場合にすぎない。

解答

準備：2 曲線はどこで接しうるか

2 曲線を $C_1 : y = 4 - x^2$、$C_2 : mx = k - y^2$ とおく。C_1 はおなじみの上に凸の放物線（parabola）で、$(\pm 2, 0)$ と $(0, 4)$ を通る。C_2 は $x = (k - y^2)/m$ であり、x 軸に関して対称で、（$m > 0$ より）左に開き、頂点が $(k/m, 0)$ の放物線である。$k > 0$ のときは y 軸と $(0, \pm\sqrt{k})$ で交わり、$k < 0$ のときはまったく交わらない。

C_1 上の点はすべて $(x, 4 - x^2)$ と表せるので、その点が C_2 上にあるのは

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$ を用いた。

> ? **考えてみよう** なぜ「接する」ことが、F が重解をもつことを意味するのか？

共有点において、C_1 の方向ベクトルは $(1, -2x)$ であり、C_2（$mx + y^2$ の等高線（level

curve)）の法線ベクトル（normal）は $(m, 2y)$ である。2曲線が接するのは方向ベクトルが法線ベクトルと垂直なとき、すなわち $m - 4xy = 0$、つまり $m - 4x(4 - x^2) = 0$ のときである。ところが $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$ はちょうどこの式である。よって2曲線が $x = a$ で接するのは、$F(a) = F'(a) = 0$、すなわち重解となるときであり、かつそのときに限る。

$F'(a) = 0$ より $m = 4a(4 - a^2)$ を得る。これを $F(a) = 0$ に代入すると

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

となり、したがって

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

である。$m > 0$ であるから、$0 < a < 2$ または $a < -2$ でなければならない。2重の因数をくくり出すと

$$F(x) = (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8),$$

となる。これは展開すれば確かめられる：x^3 の項は打ち消し合い、x^2 の係数は $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$、$x$ の係数は $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$、定数項は $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$ である。2次の因数の判別式（discriminant）は $8(4 - a^2)$ なので、ほかの交点が存在するのは $0 < a < 2$ のときに限る。それらは次の位置にある：

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

これで4つの場合を a によって分類できる：

- $k < 0$ となるのは $a^2 > 4$ のとき、かつそのときに限るので、$a < -2$ である。
- $0 < a < 2$ のとき $k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$ であるから、$k > 16$ となるのは $a < \sqrt{8/3}$ のとき、かつそのときに限る。
- $0 < a < 2$ のとき、$\frac{k}{m} < 2$ となるのは $3a^2 - 8a + 4 < 0$、すなわち $(3a - 2)(a - 2) < 0$、すなわち $a > \frac{2}{3}$ のとき、かつそのときに限る。

したがって (a) は $a < -2$、(c) は $0 < a < \frac{2}{3}$、(d) は $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$、(b) は $\sqrt{8/3} < a < 2$ に対応する。（$0 < k < 16$ かつ $k/m > 2$ となる接し方は存在しない。そのためこの場合は挙げられていない。）

小問 (i)

どの場合も、座標軸との交点は $(\pm 2, 0)$ と $(0, 4)$ が C_1 のもの、$(k/m, 0)$ および（$k > 0$ のときは）$(0, \pm\sqrt{k})$ が C_2 のものである。

(a) ここでは $a < -2$ なので、2曲線は第3象限の点 $(a, 4 - a^2)$ で接し、それ以外では交わらない。頂点は $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$ にあり、$(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$ である

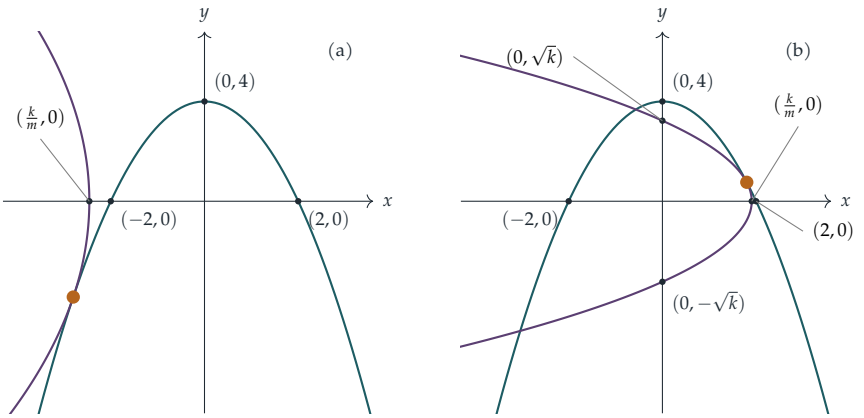
からこれは -2 より小さい。よって C_2 は全体が $(-2,0)$ より左にあり、その下側の枝は C_1 の左側の枝に寄りかかるように接する。

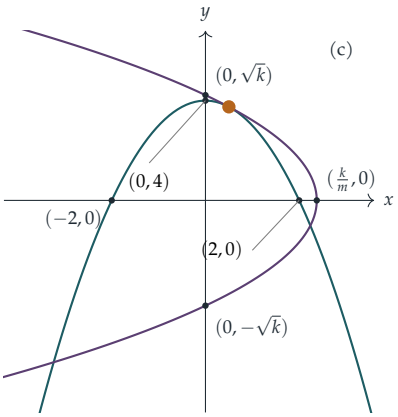
(b) 今度は $\sqrt{8/3} < a < 2$ なので、接点は第 1 象限の $(2,0)$ の近くにある。頂点は $\sqrt{3} \leq k/m < 2$ を満たし(相加平均・相乗平均の不等式(AM–GM)より $3a^2+4 \geq 4\sqrt{3}\,a$)、また $\sqrt{k} < 4$ であるから、C_2 の頂点と 2 つの y 切片はいずれも C_1 の下側にある。上側の枝は C_1 に下から接し、その後 x_+ でこれと交わる。ここで $-2 < x_+ < 0$ である(第 2 象限の点)。下側の枝は第 3 象限の $x_- < -2$ で C_1 と交わる。

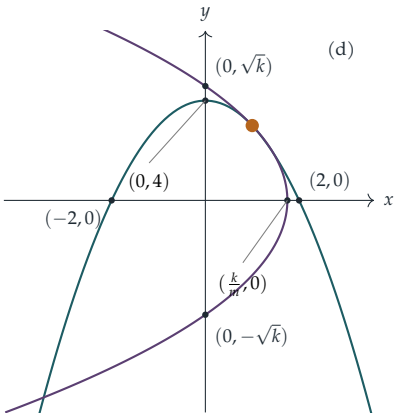
(c) ここでは $0 < a < \frac{2}{3}$ である。頂点は $(2,0)$ より右にあり、$\sqrt{k} > 4$ であるから、C_2 は C_1 の上部を包み込むように回り込み、第 1 象限で外側から接する。さらに $x_+ > 2$ である。$\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$ だからである。また $x_- < -2$ である。よって下側の枝は C_1 と第 4 象限で交わり、さらに第 3 象限でも交わる。

(d) ここでは $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$ である。頂点は 0 と 2 の間で C_1 の下側にあるが、$\sqrt{k} > 4$ であるから、上側の枝は $(0,4)$ の上を通る。上側の枝は第 1 象限で C_1 に接し、同じく第 1 象限の $x_+ \in (0,2)$ で交わりもする($x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$ であるから)。下側の枝は $x_- < -2$ で交わる。

どの場合も $x_- < -2$ である($0 < a < 2$ のとき)。$a + \sqrt{8-2a^2} > 2$ だからである($\sqrt{8-2a^2} > 2-a$ の両辺を 2 乗すればよい)。概形はそれぞれ $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$ として描いている。C_1 は青緑、C_2 は紫、接点は琥珀色で示す。







小問 (ii)

$m=12$ とし、$y=4-x^2$ を $12x=k-y^2$ に代入すると $12x=k-16+8x^2-x^4$ となる。すなわち

$$x^4-8x^2+12x+16-k=0,$$

であり、これが示すべき式である。

接点 $x=a$ においてこの 4 次方程式は重解をもつ（上の囲みを参照）ので、その導関数（derivative）もそこで 0 になる：

$$4a^3-16a+12=0 \quad\Longrightarrow\quad a^3-4a+3=0.$$

$a=1$ は解であるから $a^3-4a+3=(a-1)(a^2+a-3)$ となり、したがって

$$a=1 \qquad \text{または} \qquad a=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

k を求めるため、4 次方程式に $x=a$ を代入し、$a^3=4a-3$、したがって $a^4=4a^2-3a$ を用いて次数を下げる：

$$k=a^4-8a^2+12a+16=(4a^2-3a)-8a^2+12a+16=-4a^2+9a+16.$$

3 つの場合を順に調べる：

- $a=1$ のとき：$k=21$ なので $k>16$ かつ $k/m=\frac{7}{4}<2$ である。これは場合 **(d)** である。
- $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13})\approx 1.303$ のとき：$a^2=3-a$ であるから $k=-4(3-a)+9a+16=13a+4=\frac{1}{2}(13\sqrt{13}-5)\approx 20.94$ である。これが 16 を超えるのは $13\sqrt{13}>37$（2 乗すると $2197>1369$）だからであり、24 より小さいのは $13\sqrt{13}<53$（$2197<2809$）だからである。よって $k>16$ かつ $k/m<2$ であり、これも場合 **(d)** である。

- $a = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \approx -2.303$ のとき：$k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5+13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$ である。これは場合 **(a)** である。

よって現れる概形は (a) と (d) のみである。これは上で行った a による分類と一致する：1 と 1.303 は $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$ に含まれ、$-2.303 < -2$ である。なお、$a^3 - 4a + 3 = 0$ は $m = 4a(4-a^2)$ において $m = 12$ としたものにほかならない。

2 つの (d) の図はわずかに異なる。$a = 1$ のとき、ほかの交点は $x = -1 \pm \sqrt{6}$ であり、$x \approx 1.45$ での交点は接点の**右側**にあって、上側の枝は C_1 に上から接する（概形の図のとおり）。$a \approx 1.303$ のときは交点が $x \approx 0.84$ にあって接点の左側にあり、上側の枝は下から接する。

検算

- $m = 12$、$k = 21$ のとき、4 次式は $(x-1)^2(x^2+2x-5)$ と因数分解される。展開すると $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$ となり、これは $16 - k = -5$ とした 4 次式である。
- $(1,3)$ における C_1 の傾きは -2 であり、$12x = 21 - y^2$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$ となる。よって 2 曲線は確かにそこで接している。
- 数値的にも、ランダムな a を $(0,2)$ 内および $a < -2$ の範囲から選ぶと、公式 $m = 4a(4-a^2)$ と $k = (4-a^2)(3a^2+4)$ により $F(a)$ と $F'(a)$ が 0 になり、場合の境界は $a = \frac{2}{3}$ と $a = \sqrt{8/3}$ に現れる。$a \approx 1.3028$ のとき、数値的な解の探索によりほかの交点が $x \approx 0.8433$ と $x \approx -3.4488$ に見つかり、$x_\pm$ の予測と一致する。

よくある間違い

- 4 次方程式の解がただ 1 つであることを要求してしまう。「ちょうど 1 回接する」はほかの交点の存在を許す。実際、場合 (d) で $m = 12$ のときには交点が 2 つある。
- C_2 を右に開くように描いてしまう。$m > 0$ のとき、$x = (k - y^2)/m$ は $|y|$ が大きくなるにつれて減少する。
- (a) において、C_2 が y 切片をもたないことを忘れたり、頂点を -2 と 0 の間に置いたりしてしまう。頂点は -2 より左になければならない。

STEP のその先へ

配置を接点 a で表すという考え方は、**判別式**と**包絡線**（envelope）の世界を初めて垣間見るものである。F が重解をもつような (m,k) 全体の集合は曲線 $\left(4a(4-a^2),\,(4-a^2)(3a^2+4)\right)$ であり、この曲線を横切ると実数の交点の個数が 2 だけ変化する。これは平面曲線の代数幾何学（algebraic geometry）の入り口であり、また解がパラメータとともにどのように変化するかを調べるのに用いられる特異点（「カタストロフィー」）理論（singularity theory, catastrophe theory）の入り口でもある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の STEP 形式の曲線の問題がさらに多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。