解答例

STEP III 2012、第 2 問

純粋数学 • 無限積と級数

STEP III 2012、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q2

鍵となる考え方

(i) の積は、平方の差（difference of two squares）の公式によって括弧が一つずつ畳み込まれていくので、望遠鏡式に打ち消し合い（telescoping）、非常に簡単な形になる。$\frac{1}{1-x}$ を無限積（infinite product）として表してしまえば、対数（logarithm）をとることで積は和に変わり、その和を項別に微分すれば分数の級数（series）が得られる。(ii) は同じ技法が姿を変えたものである。$1+x+x^2$ は $1-t$ の形の二つの式の商であるから、(i) の結果をそれぞれに適用できる。

解答

以下では常に $|x|<1$ とし、問題文が認めているとおり収束（convergence）については気にしないことにする。

小問 (i)

毎回 $(1-a)(1+a)=1-a^2$ を用いて、左から括弧をまとめていく：

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

以下同様である。各段階で指数は 2 倍になり、最後の括弧 $1+x^{2^n}$ が $1-x^{2^n}$ を $1-x^{2^{n+1}}$ に変える。よって

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

$x \neq 1$ であるから $1-x$ で割ることができて

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

これを整理すれば、求める $\frac{1}{1-x}$ の表示が得られる。

ここで $n \to \infty$ とする。$|x| < 1$ より $x^{2^{n+1}} \to 0$ であるから、剰余項は消えて

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2^r}).$$

各因数は正であり（$x^{2^r} > -1$ だからである）、$1-x$ も正であるから、対数をとってよい。積の対数は対数の和である：

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+x^{2^r}),$$

両辺に -1 を掛ければ、これが求める結果である。

考えてみよう 対数の和から分数の和へは、どうすれば移れるだろうか？

両辺を x で微分する。合成関数の微分法（chain rule）により、$\ln(1+x^{2^r})$ の導関数（derivative）は

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}}.$$

左辺では $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x}$ である。項別微分（term-by-term differentiation）を行うと（これが、無視してよいとされた収束の問題である）

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

が得られる。ここで書き出した項は $r = 0, 1, 2$ のものである。これが求める級数である。

小問 (ii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$ であるから、左辺は $\ln(1+x+x^2)$ の導関数である。そこで $1+x+x^2$ に対する対数の和の表示を探す。因数分解（factorisation）$1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ からそれが得られる：

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

$|x^3| < 1$ でもあるから、(i) の対数に関する結果は x を x^3 に置き換えても成り立つ。$y_r = x^{2^r}$ とおくと $(x^3)^{2^r} = y_r^3$ となるので

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+y_r^3) + \sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+y_r) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\frac{1+y_r^3}{1+y_r}.$$

立方の和は $1+y^3=(1+y)(1-y+y^2)$ と因数分解できるので、各分数は $1-y_r+y_r^2$ となり

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{r=0}^{\infty}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}).$$

($1-y+y^2=(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ はつねに正であるから、これらの対数は意味をもつ。)

考えてみよう 微分するとき、マイナス符号はどこへ行くのだろうか？

合成関数の微分法により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})=\frac{-2^rx^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}=-\frac{2^rx^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

となり、このマイナス符号が和の前のマイナス符号と打ち消し合う。両辺を項別に微分すると

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^rx^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

最初の 3 項は

$$\begin{aligned}
r=0:&\quad\frac{1-2x}{1-x+x^2},\\
r=1:&\quad\frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4}=\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\
r=2:&\quad\frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8}=\frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8},
\end{aligned}$$

であり、これはまさに示すよう求められた級数である。

別解。 恒等式 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$ を用いると、(i) とまったく同様に、$1+x+x^2$ に対する望遠鏡式の積が直接得られる：$1+x+x^2=(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}})/\prod_{r=0}^{n}(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})$ であり、分子は 1 に近づく。

検算

- $x=0$ とおくと、いずれの級数も両辺が 1 に等しい。
- $x=\frac{1}{2}$ のとき、(ii) の左辺は $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$ である。右辺の最初の 4 項の和は 1.142369 であり、累乗 x^{2^r} が急速に小さくなるので、誤差も非常に速く小さくなる。
- 望遠鏡式に畳み込んだ積は分数を用いて厳密に確かめ、二つの級数と対数の恒等式は $(-0.95,0.95)$ 内の 1000 個の無作為な x について、30 項を用いて数値的に確かめた。

よくある間違い

- 合成関数の微分法で因数を落とすこと：x^{2^r} の導関数は $2^r x^{2^r-1}$ であり、$2^r x^{2^r}$ ではない。
- (ii) で全体の符号を誤ること：$1-y+y^2$ の導関数は $-1+2y$ であり、このマイナスこそが和の前のマイナスを打ち消すのである。

STEP のその先へ

積 $\prod(1+x^{2^r})$ は、すべての正の整数が相異なる 2 の累乗の和としてただ一通りに表せることを述べている。これは 2 進法を母関数（generating function）の形で表したものである。「収束を無視する」ことの裏には本物の問題が隠れている。無限積の対数をとってよいのはどのようなときか、また級数を項別に微分してよいのはどのようなときか。解析学の最初の講義では、これらに一様収束（uniform convergence）を用いて答える。$|x| \le c < 1$ 上では、ここに現れたものはすべて一様収束する。わかりやすい解説としては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。