解答例

STEP III 2012、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP III 2012、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q12

鍵となる考え方

三角形を、頂点 P を共有する三つの小さな三角形に分割すると、三つの距離の和がつねに高さに等しいことがわかる。最小値については、裾確率（tail probability）$\mathrm{P}(X > x)$ を考えるのが見通しのよい方法である。すべての距離が x より大きいという事象は、もとの三角形と相似な小さな三角形に対応し、相似な図形の面積は長さの比の 2 乗に比例する。三次元でも同じ考え方が体積について成り立ち、体積は長さの比の 3 乗に比例する。

解答

小問 (i)

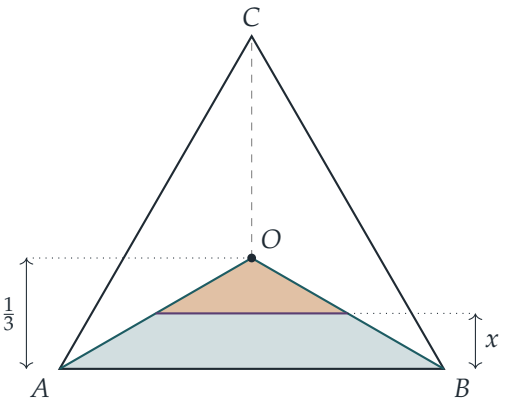
三角形の一辺の長さを s とする。高さが 1 であるから、ABC の面積は $\frac{1}{2}s$ である。P と三つの頂点を結ぶと、ABC は三角形 PAB、PBC、PCA に分割される。これらの底辺はいずれも長さ s の辺であり、高さはそれぞれ x_1、x_2、x_3 である。面積を足し合わせると

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{よって} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

X_1 が最小となる領域。 AB と CA から等距離にある点は、角 A の二等分線（angle bisector）上にある。この二等分線の B 側では、P は CA よりも AB に近い。同様に、P が BC よりも AB に近いのは、P が角 B の二等分線の A 側にあるときであり、かつそのときに限る。正三角形では角の二等分線は中線（median）でもあり、それらは中心 O で交わる。したがって、$X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ となるのは、P が三角形 ABO（下

図の網掛け部分）の内部にあるときであり、かつそのときに限る。O から AB までの距離は高さの 3 分の 1、すなわち $\frac{1}{3}$ である。



X の確率密度関数。三つの三角形 ABO、BCO、CAO は合同であるから、それぞれの確率は $\frac{1}{3}$ である（距離が等しくなるのは二等分線上だけであり、その面積は 0 である）。対称性により、X の分布は、P が ABO 内にあるという条件のもとでの X_1 の条件付き分布（conditional distribution）に等しい。このとき $X = X_1$ であり、これは P から AB までの距離である。

考えてみよう 三角形 ABO の内部で、$X_1 > x$ となるのはどのような点か。

それは、AB に平行で AB から距離 x にある直線より上側の点であり、頂点を O とする小さな琥珀色の三角形である。この三角形は ABO と相似で、高さは $\frac{1}{3}$ に対して $\frac{1}{3} - x$ であるから、その面積は ABO の面積の $((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3})^2 = (1-3x)^2$ 倍である。よって、$0 \le x \le \frac{1}{3}$ に対して

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

また、三つの距離の和は 1 であるから、X が $\frac{1}{3}$ を超えることはない。微分すると

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

であり、それ以外では $\mathrm{f}(x) = 0$ となり、示すべきことが得られた。

期待値。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \left[3x^2 - 6x^3\right]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

小問 (ii)

点から各面までの四つの距離を $Y_1, \ldots, Y_4$ とし、$Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$ とおく。各面の面積はすべて等しく S であり、体積は $\frac{1}{3}S \cdot 1$ である。点と四つの頂点を結ぶと、四面

体（tetrahedron）は四つの小さな四面体に分割される。それぞれは一つの面を底面とし、Y_i の一つを高さとするから

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)=\tfrac{1}{3}S, \qquad \text{よって} \qquad Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=1.$$

重心（centroid）はどの面からも距離 $\frac{1}{4}$ にあるから、内接球の半径は $\frac{1}{4}$ である。

考えてみよう 今度は集合 $\{Y>y\}$ はどのような形をしているか。

それは、四つの面すべてから距離が y より大きい点の集合である。各面を自分自身と平行に y だけ内側へ移動すると、重心を共有するより小さな正四面体が得られる。重心から各面までの距離は $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{4}-y$ に減るから、相似比は $(\frac{1}{4}-y)/\frac{1}{4}=1-4y$ である。体積は相似比の 3 乗に比例するから、$0\le y\le\frac{1}{4}$ に対して

$$\mathrm{P}(Y>y)=(1-4y)^3.$$

（同じ議論を小問 (i) の三角形に適用すると、内側の三角形の内接円の半径が $\frac{1}{3}-x$ であることから、$(1-3x)^2$ が直接得られる。）

$Y\ge 0$ であるから、裾確率を積分することで $\mathrm{E}(Y)$ を求めることができる：

$$\mathrm{E}(Y)=\int_0^{1/4}\mathrm{P}(Y>y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{1/4}(1-4y)^3\,\mathrm{d}y=\left[-\tfrac{1}{16}(1-4y)^4\right]_0^{1/4}=\tfrac{1}{16}.$$

確率密度関数を用いたい場合は、それは $[0,\frac{1}{4}]$ 上で $12(1-4y)^2$ であり、やはり $\int_0^{1/4}12y(1-4y)^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{16}$ となる。

したがって、最も近い面までの距離の期待値は $\frac{1}{16}$ である。

検算

- $\int_0^{1/3}6(1-3x)\,\mathrm{d}x=1$ であるから、f は確かに確率密度関数である。
- 規則性がある：高さ 1 の三角形では $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$、高さ 1 の四面体では $\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$ である。一次元では、$[0,1]$ から無作為に選んだ点から近いほうの端までの距離の平均は $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ であり、この規則性に合致する。
- 三角形内の 4×10^5 個の無作為な点を用いたモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、平均は 0.1110（$\frac{1}{9}\approx0.1111$ に対して）となり、ヒストグラムは $6(1-3x)$ とよく一致した。四面体内の 3×10^5 個の点では、平均は 0.0625（$\frac{1}{16}=0.0625$ に対して）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X > x)$ を微分するときにマイナス符号を忘れる：確率密度関数は $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$ である。
- 内側の三角形の高さが $1 - x$ ではなく $1 - 3x$ であることを忘れる：三つの辺がそれぞれ x だけ内側に移動するからである。
- 小問 (ii) で相似比の 2 乗を用いてしまう。体積は 3 乗に比例する。

STEP のその先へ

この問題に現れる二つの道具は、大学の最初の確率論の講義で頻繁に登場する。$\mathrm{P}(\min\ >\ x)$ を通して最小値の分布を求める方法と、非負の確率変数（random variable）に対して $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$ を計算する方法である。先ほどの規則性はさらに続き、高さ 1 の n 次元単体（simplex）では、最も近い面までの距離の期待値は $1/(n+1)^2$ となる。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これら二つの道具を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。