解答例

STEP III 2012、第 11 問

力学 ・ 折り重なったロープの落下

> **STEP III 2012、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q11

鍵となる考え方

すべてはループの幾何から導かれる。質点が x だけ落下したときに、静止している側と動いている側の長さがそれぞれいくらかがわかれば、失われた位置エネルギー（potential energy）（各直線部分の重心（centre of mass）を用いる）と、得られた運動エネルギー（kinetic energy）（速さをもつのは質点と動いている側だけである）を書き下すことができる。するとエネルギー保存則（energy conservation）により v^2 が x の関数として得られ、$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であるから、加速度（acceleration）は $\frac{1}{2}v^2$ を x で微分すれば求まる。

解答

モデルと幾何

ロープを、一様で伸び縮みせず（inextensible）、完全に柔軟な線とみなし、その単位長さあたりの質量を

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

とする。質点は質点（point mass）として扱い、ループの底の曲がった部分の大きさは無視できるものとする。深さは P から下向きに測る。

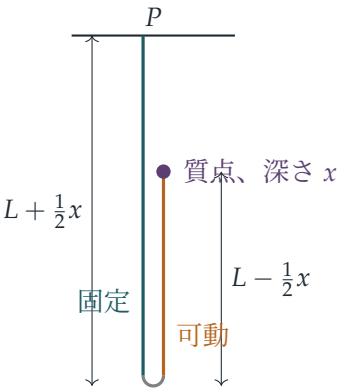
質点が距離 x だけ落下したとき、ロープはループの底（深さを d とする）でつながった 2 本の鉛直な部分からなる。

- **固定**部分：P から底までの部分で、静止しており、長さは d である。
- **可動**部分：質点（深さ x）から底までの部分で、長さは $d - x$ である。

全長は $2L$ であるから $d + (d - x) = 2L$ となり、

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{可動部分の長さ} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

を得る。（最初は $x = 0$ であり、両部分の長さはともに L である。）



失われた位置エネルギー

各直線部分は一様であるから、その重心は中点にある。深さ h にある質量 μ の位置エネルギーは $-\mu g h$ である。系全体にわたる質量 × 深さの和を $D(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d - x) \cdot \frac{x + d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}(2d^2 - x^2) \\ &= mx + \rho\Big(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\Big) = mx + \rho\Big(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\Big). \end{aligned}$$

最初は $D(0) = \rho L^2$ であるから、$\rho L = M$ を用いると、失われた位置エネルギーは

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\Big(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\Big) = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

である。

得られた運動エネルギー

固定部分は静止している。質点と可動部分の各点は（仮定してよいとされているとおり）速さ v をもつので、動いている質量は $m + \rho\big(L - \tfrac{1}{2}x\big)$ であり、

$$\text{運動エネルギー} = \tfrac{1}{2}\Big(m + M - \frac{Mx}{2L}\Big)v^2 = \frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2.$$

となる。系は静止状態から動き始めるので、エネルギー保存則より運動エネルギー = 失われた位置エネルギーである。

$$\frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2 = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

すなわち

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

となり、示すべき式が得られた。$x < 2L$ のとき $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$ であるから $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$ となり、分母が 0 になることはない。

加速度

簡単のため

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

とおくと、$\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$ であり、（x で微分して）$A' = -\frac{1}{4}M$、$B' = -\frac{1}{2}M$ である。

考えてみよう x の関数としての v^2 から、どのようにして加速度を得ればよいか？

連鎖律（chain rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であり、これが加速度である。これは質点が下向きに動いていて、x が t とともに増加している間は正しい。

積の微分法（product rule）と商の微分法（quotient rule）により、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

鍵となる簡約は $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$ であり、したがって最初の分数はちょうど 1 になる。よって

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

加速度は g を上回る

放した後は $0 < x < 2L$ である。このとき

- 上で示したとおり $B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$ であるから、$B^2 > 0$ である。
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$ である。
- $M > 0$、$g > 0$、$x > 0$ である。

したがって付加項 $\frac{MgxA}{2B^2}$ は正であり、$0 < x < 2L$ を満たすすべての x に対して加速度は g より真に大きい。（放した瞬間は $x = 0$ であり、加速度はちょうど g である。）

検算

- $M = 0$（軽いロープ）とすると、どちらの式も自由落下（free fall）の式 $v^2 = 2gx$、加速度 g に帰着する。
- $m = 0.3$、$M = L = 1$、$x = 1$、$g = 9.8$ とすると、$A = 1.05$、$B = 0.8$ であるから $v^2 = 25.725$ となり、加速度は $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ で、g を大きく上回る。この点で $\frac{1}{2}v^2$ を数値的に微分しても同じ値が得られ、静止状態から運動方程式（equation of motion）を数値的に時間発展させると v^2 の式が再現される。
- 単位：mL、ML、Mx はいずれも質量 × 長さの単位をもつので、分数は無次元（dimensionless）であり、v^2 は gx と同じ単位をもつ。

よくある間違い

- 可動部分の長さを誤る：落下する側が引き込むロープは両側で分け合われるので、ループの底は x ではなく $\frac{1}{2}x$ だけ下がる。
- 固定部分に運動エネルギーを与えてしまう、あるいは固定部分の位置エネルギーも変化すること（長くなるので重心が下がる）を忘れる。
- $\frac{1}{2}v^2$ ではなく v^2 を微分してしまい、加速度が 2 倍になる。

STEP のその先へ

これは古典的な「折り畳まれた鎖の落下」の問題であり、運動している質量が時間とともに変化する系である。ここで用いたエネルギーが保存されるモデルでは、端が g より速く加速することが予測され、さらに $m = 0$ ならば $x \to 2L$ のとき速さは限りなく大きくなる。これが鞭の鳴る音の背後にある考え方である。曲がった部分で本当にエネルギーが保存されるかどうかは研究文献の中で議論されてきたが、実際の鎖を用いた実験では、ここでの結果と同様に g より大きい加速度が観測されている。可変質量系（variable-mass systems）や、エネルギーと運動量（momentum）の注意深い使い分けについては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。