解答例

# STEP III 2012、第 10 問

力学 ・ 円運動

**STEP III 2012、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

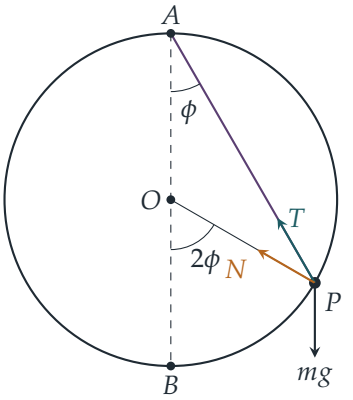
step.maths.org/questions/12-s3-q10

## 鍵となる考え方

すべては、円環の中心、円環の最高点、小環の 3 点がつくる二等辺三角形（isosceles triangle）の幾何に帰着する。糸の長さが $2a\cos\phi$ であること、そして小環へ向かう半径が鉛直下向きと角 $2\phi$ をなすことが分かれば、問題はエネルギーの式 1 本（$\lambda$ と速さを求める）と、半径方向の運動方程式 1 本（抗力を求める）に帰着する。

## 解答

小環をなめらかな円周上を動く質点とみなし、糸はフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性糸とする。円環の中心を $O$、最高点を $A$、最低点を $B$、小環を $P$ とし、$c = \cos\phi$ とおく。



### 幾何

三角形 $OAP$ では $OA = OP = a$ であるから二等辺三角形であり、$A$ と $P$ における角はともに $\phi$ である。したがって

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

よって $P$ の $O$ からの深さは $a\cos 2\phi$ であり、$B$ からの高さは $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$ である。糸の伸び（ぴんと張っている間）は $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$ であり、糸は $2c-1=0$、すなわち $\phi = \frac{\pi}{3}$ のときにたるむ。

### 弾性率

円環はなめらかで、抗力は運動の向きに垂直であるから、力学的エネルギーは保存される（conservation of mechanical energy）。$B$（$\phi = 0$）では小環は静止しており、伸びは $a$ であるから、弾性エネルギーは $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$ である。$\phi = \frac{\pi}{3}$ では再び静止し、糸はちょうどたるんだところで（弾性エネルギーは o）、小環は $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$ だけ上昇している。したがって

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

### 速さ

糸が張っている一般の角 $\phi$ において、$B$ からのエネルギー保存により

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi\\ &= \tfrac{3}{2}mga[1-(2c-1)^2] - 2mga(1-c^2)\\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2\\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

よって

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

これは $c=1$ と $c=\frac{1}{2}$ で o となり、その間では正である。これは小環が $\phi = -\frac{\pi}{3}$ と $\phi = \frac{\pi}{3}$ の間を往復することと整合する。すなわち、静止したのち $B$ を通って反対側の対称な点まで滑り戻り、これを繰り返す。運動の間つねに $\frac{1}{2} \le c \le 1$ であり、糸は張っていて（両端の点でちょうどたるむ）、張力は

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

### 抗力

図のように、抗力（reaction）の $O$ へ向かう成分を $N$ とする（負になることもありうる）。$PO$ に沿って中心向きに力を分解する。

- 張力は $PA$ に沿って働き、これは $PO$ と角 $\phi$（二等辺三角形の底角）をなすので、$O$ 向きの成分は $T\cos\phi$ である。
- $OP$ は鉛直下向きと角 $2\phi$ をなすので、重力は $O$ から**遠ざかる**向きに成分 $mg\cos 2\phi$ をもつ。

**考えてみよう** ここで重力の成分が内向きではなく外向きになるのはなぜか？

$\phi < \frac{\pi}{4}$ では小環は $O$ より下にあり、重力は小環を中心から遠ざける向きに引く。$P$ が $O$ の高さを通過するとき $\cos 2\phi$ の符号が変わるので、1つの式 $-mg\cos 2\phi$（$O$ 向き）で両方の場合を表せる。

中心向きのニュートン（Newton）の第2法則により

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

$T$、$mv^2/a$ および $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

したがって抗力の大きさは

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

となり、示すべき式が得られる。ただし括弧内が決して負にならないことが必要で、これを次に示す。（負号は、運動の間つねに円環が小環を**外向き**、すなわち $O$ から遠ざかる向きに押していることを表している。）

### $R$ は決して0にならない

2次式 $12c^2 - 15c + 5$ の判別式（discriminant）は $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$ であり、最高次の係数は正であるから、すべての実数 $c$ に対して厳密に正である。平方完成（completing the square）すると

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

よって運動の間つねに $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$ であり、最小となるのは $\cos\phi = \frac{5}{8}$ のときである（これは $[\frac{1}{2}, 1]$ に含まれるので、実際に最小値をとる）。

## 検算

- $B$（$c = 1$）では、小環は静止しており、$T = 3mg$ が上向き、重力 $mg$ が下向きに働くので、円環は $2mg$ で下向きに押さなければならない。公式は $(12 - 15 + 5)mg = 2mg$ を与える。
- たるむ点（$c = \frac{1}{2}$）では、張力も速さも 0 で、$P$ は $O$ より $\frac{a}{2}$ だけ上にあるので、半径方向の抗力は重力の内向き成分 $mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}mg$ とつり合う。公式は $(3 - 7.5 + 5)mg = \frac{1}{2}mg$ を与える。
- 運動方程式を数値的に積分した（RK4、$B$ からわずかにずらした位置から出発）。小環は $B$ から角 $2.094 \approx \frac{2\pi}{3}$ のところで止まり、計算された抗力は公式と $10^{-7}$ 以内で一致し、その最小値は $0.3125\,mg = \frac{5}{16}mg$ であった。

## よくある間違い

- 小環の角度位置を $2\phi$ ではなく $\phi$ としてしまう。円周角は中心角の半分である。
- フックの法則や弾性エネルギーで、伸び $2a\cos\phi - a$ ではなく糸の全長 $2a\cos\phi$ を使ってしまう。
- 抗力が内向きであると決めつけ、負の答えが出て戸惑う。問題が求めているのはその大きさだけである。

## STEP のその先へ

この小環は自由度（degree of freedom）1 の系であり、このような系を扱う最もすっきりした方法は、1 つの座標を用いたエネルギー（あるいはラグランジアン（Lagrangian））による定式化である。$R$ のような拘束力（constraint force）は、そのあとでニュートンの法則から求めればよい。運動方程式はエネルギーから、拘束力は力の分解から、というこの役割分担こそ、大学 1 年の力学の講義で針金に通したビーズを扱う方法そのものである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* は、拘束のある円運動とエネルギー法をこの精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。