解答例

STEP III 2012、第 1 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

STEP III 2012、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s3-q1

鍵となる考え方

どちらの微分方程式（differential equation）も二階（second order）かつ非線形（non-linear）であり、決まった解法はない。工夫の要点は、n をうまく選ぶことで、$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ に現れる括弧の部分を各方程式の左辺に一致させられることである。そうすると方程式は「$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ がただちに積分できる式に等しい」ことを述べていることになり、そこから変数分離（separation of variables）できる一階（first order）の方程式が得られる。

解答

準備の結果

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$、$y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ と書く。積の微分法（product rule）を用い、y^n と $(y')^2$ には合成関数の微分法（chain rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'(n(y')^2 + 2yy''),\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

小問 (i)

左辺は $(y')^2 + 2yy''$ であり、これは $n = 1$ のときの括弧の部分である。そこで $z = y(y')^2$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'((y')^2 + 2yy'') = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

積分すると $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$ である。$x = 0$ では $y = 1$、$y' = 0$ であるから $0 = \frac{2}{3} + C$ となり、

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}(y^{3/2} - 1). \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ からわかるのは $(y')^2$ だけである。平方根の符号はどちらをとればよいか。また、両辺をともに 0 にする $y \equiv 1$ は解になりうるか。

定数関数 $y \equiv 1$ はもとの方程式の解では**ない**。代入すると $0 = 1$ となってしまうからである。実際、方程式に $x = 0$ を代入すると $0 + 2y''(0) = 1$ となるので $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$ である。したがって y は $x = 0$ で極小値をとり、小さな $x > 0$ に対して $y' > 0$ である。また、方程式は $x \mapsto -x$ で不変であるから、解は偶関数（even function）であり、$x > 0$、$y' > 0$、$y > 1$ の範囲で考えればよい。

$(*)$ に y を掛け、正の平方根をとって変数を分離すると、

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

$w = y^{3/2} - 1$ とおくと $\mathrm{d}w = \frac{3}{2}y^{1/2}\,\mathrm{d}y$ である。左辺は $\frac{2}{3}w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ となり、$x = 0$（このとき $w = 0$）から積分すると、

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16} \cdot \tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

よって $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$ であり、偶関数であることから $x < 0$ でもこれが成り立つ。したがって

$$y = (\tfrac{3}{8}x^2 + 1)^{2/3},$$

となり、示された。

直接確かめてみる。$u = \frac{3}{8}x^2 + 1$ とおくと $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$ であるから、$y(y')^2 = u^{2/3} \cdot \frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$ である。一方 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$ であるから、$(*)$ は成り立つ。

小問 (ii)

今度は左辺が $(y')^2 - yy''$ である。$n(y')^2 + 2yy''$ がこれの定数倍になる必要があるので $n : 2 = 1 : -1$、すなわち $n = -2$ である。$z = y^{-2}(y')^2$ とおく（y は 1 の近くにあり 0 ではないので問題ない）と、

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'(-2(y')^2 + 2yy'') = -2y^{-3}y'((y')^2 - yy'') = -2y^{-3}y'\,(-y^2) = \frac{2y'}{y},$$

となる。ここで方程式を $(y')^2 - yy'' = -y^2$ の形で用いた。積分すると $z = 2\ln y + C$ であり、$x = 0$ とすると $0 = 0 + C$ である。よって

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 2\ln y.$$

$v = \ln y$ とおくと $v' = y'/y$ であり、方程式は $(v')^2 = 2v$、$v(0) = 0$ となる。

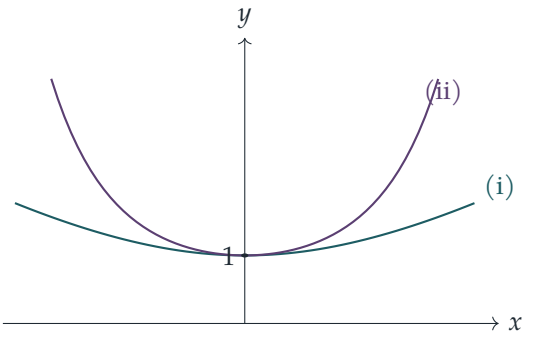
小問 (i) と同様に、$v \equiv 0$（すなわち $y \equiv 1$）はこの一階の方程式を満たすが、もとの方程式は満たさない。代入すると $1 = 0$ となってしまうからである。$x = 0$ でもとの方程式から $0 - y''(0) + 1 = 0$ となるので $y''(0) = 1 > 0$ である。方程式はやはり $x \mapsto -x$ で不変であるから、$v' > 0$ となる $x > 0$ の範囲で考える。すると

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

となり、偶関数であることからこれはすべての x で成り立つ。したがって

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

確認しよう。$y' = xy$、$y'' = (1 + x^2)y$ であるから、$(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2(x^2 - 1 - x^2 + 1) = 0$ である。また $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ も成り立つ。



検算

- どちらの解も偶関数であり、$y''(0)$ の値から予想されるとおり、$x = 0$ で最小値 1 をとる。
- 小問 (ii) にはもっと速い方法がある。$y = \mathrm{e}^v$ を方程式に直接代入すると $y' = v'\mathrm{e}^v$、$y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$ となり、すべてが打ち消し合って $v'' = 1$ が残る。よってただちに $v = \frac{1}{2}x^2$ が得られる。
- 数値的には、(i) を $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解くと $y(2) \approx 1.842016$ となり、$(\frac{5}{2})^{2/3}$ と一致する。(ii) では $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$ となる。

よくある間違い

- z の積分定数（constant of integration）を忘れること。小問 (i) では初期条件により積分定数は 0 でなく、$C = -\frac{2}{3}$ である。
- 小問 (ii) で類推から $n = 1$ を選んでしまうこと。$(y')^2$ と yy'' の係数の比が一致しなければならず、そのためには $n = -2$ でなければならない。
- 一階の方程式から得られる $y \equiv 1$ を、もとの方程式で確かめずに解として認めてしまうこと。

STEP のその先へ

ここで用いた方法は、二階の方程式に対する**積分因子**（integrating factor）である。$(y')^2 + 2yy''$ に y' を掛けると完全な導関数の形になる。これは、$\ddot{x} = -\omega^2 x$ に $\dot{x}$ を掛けるとエネルギー保存則（conservation of energy）が得られるのとまったく同じである。今回の方程式のように x を陽に含まない方程式は、$p = y'$ を y の関数とみなすことで、つねに一階の方程式に帰着できる。$y \equiv 1$ についての懸念は、解の非一意性（non-uniqueness）の一端を垣間見せている。$v' = \sqrt{2v}$ は $v = 0$ においてリプシッツ（Lipschitz）条件を満たさないのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、階数低下法（reduction of order）と解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の両方が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。