解答例

STEP II 2012、第 9 問

力学 ・ 放物運動

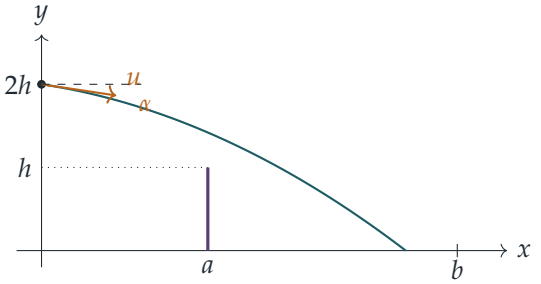
> **STEP II 2012、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q9

鍵となる考え方

ボールの高さを、発射点からの水平距離 x の関数として表す。これが軌道の方程式（trajectory equation）である。すると「ネットを越える」は $x = a$ における一つの不等式となり、「b より手前に着地する」は飛行時間（time of flight）についての不等式となる。最後の部分がうまくいくのは、二つの条件がいずれも同じ量 $1/u^2$ の評価、一方は上界（upper bound）、もう一方は下界（lower bound）になるからである。したがって下界は上界より小さくなければならず、u は消える。

解答

ボールを、空気抵抗と回転を無視して重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化し、$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$ とする。原点を発射点の真下の地面にとり、x をネットに向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。



ネットを越える条件

初速度の成分は、水平方向に $u\cos\alpha$、下向きに $u\sin\alpha$ である。時間 t が経過した後、

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(u\cos\alpha)$ を代入して消去すると、軌道は

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

水平方向の速度は一定かつ正なので、ボールはちょうど一度だけ $x = a$ に到達し、そこで $y > h$ であればネットを越える：

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

正の量 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$ を掛けると、

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

となり、これが求める結果である。

b より手前に着地する条件

ボールは $2h$ だけ落下したときに着地する。すなわち $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$ のときである。この t についての二次方程式は異符号の二つの解をもち（解の積は $-4h/g < 0$）、着地時刻は正の解である：

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

ボールが水平距離 b より手前に着地するのは、$uT\cos\alpha < b$、すなわち $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$ のとき、かつそのときに限る（$u\cos\alpha > 0$ だからである）。両辺に g を掛けて $u\sin\alpha$ を加えると、

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

となり、これが二つ目の結果である。

最後の不等式

考えてみよう u を含む二つの条件から、どうして u を含まない条件が得られるのだろうか？

一つ目の結果は $1/u^2$ の上界である。二つ目を $1/u^2$ の**下界**に書き直すことができれば、u が何であっても、下界は上界より小さくなければならない。

二つ目の不等式の両辺はともに正である（右辺が正であるのは $\sin\alpha \geq 0$ かつ $\cos\alpha > 0$ だからである）。よって両辺を 2 乗しても不等式は保たれる：

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ の項が打ち消し合い、$2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$ が残る。すなわち

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

一つ目の結果と合わせると、

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

正の因数 $2/(g\sec^2\alpha)$ を約し、全体に $a^2b^2 > 0$ を掛けると、

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff \quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff \quad & ab(b-a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

考えてみよう $b - a$ で割ってよいだろうか？

よい。ただし符号が重要である。ボールは $x = a$ においてまだ高さ $h > 0$ より上にあるので、a より遠いところに着地する。そして b より手前に着地する。よって $b > a$ であり、$ab(b-a) > 0$ だから、割っても不等号の向きは変わらない：

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b-a)}.$$

検算

- 単位：$a\tan\alpha$ は h と同じく長さであり、ga^2/u^2 も長さである。したがって $1/u^2$ に対するそれぞれの評価の単位は $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$ となり、あるべき単位になっている。
- $\alpha = 0$ のとき、最終結果は $b^2 > 2a^2$ となる。実際、水平に打ち出されたボールが $x = a$ までに落下する距離は h 未満である。落下距離は x^2 に比例するので、$x = \sqrt{2}\,a$ までの落下距離は $2h$ 未満であり、したがってボールは $\sqrt{2}\,a$ より遠くに着地し、$b > \sqrt{2}\,a$ となる。

- 数値的には、$g = 9.8$、$u = 12$、$\alpha = 0.2$、$h = 1.5$ として運動を逐次計算すると、着地距離は 6.7759 となり、$uT\cos\alpha$ と一致する。20 000 個の無作為な場合について、最初の二つの不等式は「ネットを越える」「b より手前に着地する」とそれぞれ完全に一致し、両方が成り立つときには必ず最後の不等式が成り立った。

よくある間違い

- 初速度の鉛直成分を $+u\sin\alpha$ としてしまう。ボールは水平より**下向き**に打ち出されている。
- 両辺が正であることを確かめずに不等式を 2 乗する。
- $b - a$ で割る際に、それが正である理由を述べない。

STEP のその先へ

最後の部分は、不等式の間でパラメータを消去すること（eliminating a parameter）の小さな例である。L と U が u を含まないとき、連立不等式 $L < 1/u^2 < U$ が解をもつのは $L < U$ のとき、かつそのときに限る。同じ考え方を多数の一次不等式に対して系統的に行うのがフーリエ–モツキンの消去法（Fourier–Motzkin elimination）であり、線形計画法（linear programming）の基礎の一つである。力学については、軌道がもはや放物線にならない空気抵抗のある放物運動も含めて、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。