解答例

STEP II 2012、第 8 問

純粋数学 • 非線形漸化式

STEP II 2012、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q8

鍵となる考え方

漸化式（recurrence）$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$ は非線形（non-linear）であるが、これはすべての n について成り立つ。そこで、連続する二つの n の値についてこの式を書き下して辺々引くと、扱いにくい定数 q^2 が消える。残った式は、比 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ が決して変化しないことを述べており、これによって数列は定数係数 p をもつ線形漸化式（linear recurrence）に帰着される。最初の不等式（inequality）はまさに $p > 2$ という主張であり、これが数列の増加を生み出すのである。

解答

不等式

すべてを共通の分母 $\alpha\beta$ でまとめると、

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

$\beta - \alpha > q > 0$ であるから、両辺を 2 乗すると（両辺とも正）$(\beta - \alpha)^2 > q^2$ となり、分子は正である。$\alpha, \beta > 0$ より分母 $\alpha\beta$ も正である。したがってこの式は正であり、示すべきことが示された。

第一の恒等式

漸化式の両辺に u_{n-1} を掛けると、すべての $n \geq 1$ について

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

n を $n+1$ に置き換えると（$n+1 \geq 1$ であるから、これも許される）、

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

第二の式から第一の式を引くと q^2 が消えて、

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

これを整理すると、すべての $n \geq 1$ について

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{すなわち} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

が成り立つ。これが求める結果である。

線形漸化式

考えてみよう いま証明した恒等式には四つの異なる項が含まれている。これがどうして単一の定数 p をもつ漸化式を与えるのだろうか。

この恒等式を $u_n u_{n+1}$ で割る。数列のどの項も 0 ではないので、これは許される：

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

よって、量 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ はすべての $n \geq 1$ について $v_{n+1} = v_n$ を満たす。つまりこれは定数である。その共通の値を p とおくと $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$、すなわち

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

p を求めるには $n = 1$ を用いる。漸化式より $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$ であるから、

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

これは最初の部分の式そのものであるから、$\beta - \alpha > q$ のとき $p > 2$ であることはすでにわかっている。

$\beta > \alpha + q$ のとき数列は増加する

$d_n = u_{n+1} - u_n$ とおく。線形漸化式を $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$ の形で用いると、

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

考えてみよう $p-2>0$ であることはわかっているが、なぜ $(p-2)u_n$ が正といえるのだろうか。$u_n>0$ であることはまだわかっていない。

正であることと増加することは、数学的帰納法（induction）によって同時に証明しなければならない。主張：すべての $n\geq 1$ について、$u_n>0$ かつ $d_{n-1}>0$ である。

$n=1$ のとき：$u_1=\beta>0$ かつ $d_0=\beta-\alpha>q>0$ である。

ある $n\geq 1$ について $u_n>0$ かつ $d_{n-1}>0$ と仮定する。このとき $p>2$ であるから、

$$d_n=d_{n-1}+(p-2)u_n>0, \qquad u_{n+1}=u_n+d_n>0,$$

となり、これは $n+1$ に対する主張である。数学的帰納法により、すべての $n\geq 0$ について $d_n=u_{n+1}-u_n>0$ となるので、数列は狭義単調増加（strictly increasing）である。（実際には差そのものも増加するので、増加は線形よりも速い。また、すべての項が正であるから、この場合はどの項も o でないという条件は自動的に満たされる。）

$\beta=\alpha+q$ の場合

このとき $(\beta-\alpha)^2-q^2=0$ であるから、ちょうど $p=2$ となり、$d_n-d_{n-1}=0$ である。差はすべて $d_0=\beta-\alpha=q$ に等しいので、数列は等差数列（arithmetic progression）

$$u_n=\alpha+nq.$$

となる。$q>0$ であるから依然として狭義単調増加であるが、今度は線形にしか増加しない。直接確かめると、$(\alpha+(n+1)q)(\alpha+(n-1)q)=(\alpha+nq)^2-q^2$ であるから、この数列は確かにもとの漸化式を満たす。

検算

- $\alpha=1$、$\beta=4$、$q=2$ とする（このとき $\beta>\alpha+q$）。漸化式から $1,4,12,35,\frac{407}{4},\ldots$ が得られ、$p=\frac{1+16-4}{4}=\frac{13}{4}$ である。実際、$\frac{13}{4}\cdot 4-1=12$ かつ $\frac{13}{4}\cdot 12-4=35$ となる。
- $\alpha=1$、$q=2$、$\beta=3$ とすると、項は $1,3,5,7,\ldots$ となり、最後の部分の等差数列になる。
- 数百組の無作為な α,β,q について、二つの恒等式を厳密な有理数演算で確かめ、$\beta>\alpha+q$ のときは常に数列が増加することも確かめた。

よくある間違い

- $u_n > 0$ であることを先に知らないまま、$p > 2$ から $d_n > d_{n-1}$ を結論してしまうこと。この二つの事実は同じ帰納法の中で扱わなければならない。
- $u_n u_{n+1}$ が 0 でないことに触れずに、それで割ってしまうこと。
- 辺々引く段階で添字 $n+1$ における漸化式を用いており、そのためには $n+1 \geq 1$ が必要であることを忘れること。

STEP のその先へ

非線形漸化式がひそかに線形漸化式を満たしているとき、その漸化式は隠れた**不変量**（invariant）をもつという。ここでは $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$、あるいは同値な $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$ がそれであり、これは力学における保存量（conserved quantity）の離散版である。線形漸化式 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$ の解は、$\lambda + \lambda^{-1} = p$ として $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$ で与えられる。これは $p > 2$ のとき実数で指数関数的に増加し、重解（repeated root）の場合 $p = 2$ には $A + Bn$ となる。これはまさに上で見た二分法である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 風の漸化式がさらに載っており、微分方程式との類似については Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。