解答例

STEP II 2012、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと円

STEP II 2012、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

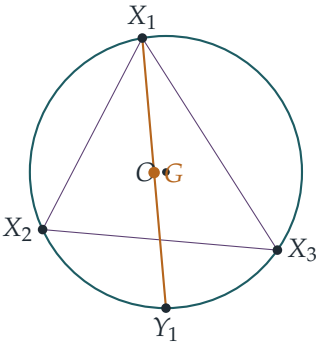
step.maths.org/questions/12-s2-q7

鍵となる考え方

点 Y_1 は X_1 と G を通る直線上にあるので、その位置ベクトル（position vector）は $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{g}$ の簡単な結合で表され、未知のスカラーは一つだけである。Y_1 について他に分かっているのは単位円上にあることだけなので、$|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$ から λ_1 についての方程式が得られる。これは二次方程式であるが、一つの解はあらかじめ明らかである。直線は X_1 自身で円と交わるので、その解に対応する因数をくくり出すことができる。

解答

$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$、$\lambda = \lambda_1$ とおく。各 $\mathbf{x}_i$ は単位ベクトル（unit vector）なので、$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$ である。



Y_1 の位置ベクトル

$\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$ より $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)),\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$ を用いた。これが求める式である。

λ_1 を求める

Y_1 は円周上にあるので $|\mathbf{y}_1|^2 = 1$、したがって $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$ である。必要なのは

$$|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2 = 1 + 2\alpha + 1 = 2 + 2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = \beta + \gamma.$$

である。よって $|3\mathbf{y}_1|^2$ を自分自身との内積（dot product）として展開すると、

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

を得る。λ の累乗ごとに整理して 2 で割ると、

$$(3 + \alpha - 2\beta - 2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha - \beta - \gamma)\lambda - (3 - \alpha - \beta - \gamma) = 0.$$

となる。見通しをよくするために

$$A = 3 + \alpha - 2\beta - 2\gamma, \qquad B = 3 - \alpha - \beta - \gamma,$$

とおくと、一次の係数はちょうど $A - B$ になっていることに気づく。よって方程式は $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$ であり、次のように因数分解できる。

$$(\lambda + 1)(A\lambda - B) = 0.$$

考えてみよう なぜ $\lambda = -1$ が解になるはずなのか。また、なぜそれを除外してよいのか。

$\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ に $\lambda = -1$ を代入すると $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ となる。X_1 と G を通る直線上のすべての点は $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ の形をしており、この直線は Y_1 だけでなく X_1 でも円と交わるので、この二次方程式は初めから $\lambda = -1$ を解にもつはずであった。$\lambda_1 > 0$ が与えられているので $\lambda_1 \neq -1$ であり、したがって $A\lambda_1 = B$ である。

あとは A で割ってよいことを確かめればよい。$A = 0$ ならば、$A\lambda_1 = B$ から $B = 0$ となってしまう。しかし

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2 = 3 + 2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{よって} \qquad B = \tfrac{1}{2}(9 - |\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2) = \tfrac{9}{2}(1 - |\mathbf{g}|^2).$$

である。三角不等式（triangle inequality）より $|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|\le 3$ であり、等号が成り立つのは三つの単位ベクトルが等しいときに限る。三点は相異なるので $B>0$ である。ゆえに $A\neq 0$ であり、

$$\lambda_1=\frac{B}{A}=\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

となって、示すべき式が得られた。

最後の小問

$\lambda_1>0$ として $\overrightarrow{GY_1}=-\lambda_1\overrightarrow{GX_1}$ であるから、長さについて $GY_1=\lambda_1 GX_1$ が成り立ち、

$$\frac{GX_1}{GY_1}=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

となる。添字を巡回させて（$1\to2\to3\to1$、これにより $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$ となる）同じ議論を行えば、残り二つの比が得られる。分母 $B=3-\alpha-\beta-\gamma$ は対称式なので三つとも共通であり、分子はそれぞれ

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma,\qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha,\qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

である。これらの和は $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma)=9-3(\alpha+\beta+\gamma)=3B$ となる。したがって

$$\frac{GX_1}{GY_1}+\frac{GX_2}{GY_2}+\frac{GX_3}{GY_3}=\frac{3B}{B}=3.$$

検算

- 正三角形の場合：このとき $G=O$ であり、G を通る弦はすべて直径なので、どの比も 1 である。公式では $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$ となり、$\lambda_1=\frac{9/2}{9/2}=1$ を得る。
- 幾何学的な解釈もできる：$A=\frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2=\frac{9}{2}GX_1^2$、$B=\frac{9}{2}(1-OG^2)$ であるから、$\lambda_1=B/A$ は $GX_1\cdot GY_1=1-OG^2$ を意味する。これは方べきの定理（intersecting chords theorem、power of a point）である。
- 数値による確認：X_1,X_2,X_3 を角度 0、1、2.5 ラジアンの位置にとると、三つの比 GX_i/GY_i はそれぞれ約 1.13、0.31、1.57 となり、その和は計算機の精度の範囲で 3 に一致する。同じ方法で 20 000 個のランダムな三角形について確かめた。

よくある間違い

- $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$ には単なる $1+1$ だけでなく交差項 2α が含まれることを忘れる。
- 解 $\lambda=-1$ に気づかず、解の公式で力ずくで計算してしまう。
- $3+\alpha-2\beta-2\gamma$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

この問題に隠れている等式 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$ は、円に関する点の**方べき**であり、内積を用いた計算はそのベクトルによる証明になっている。長さや角度がすべて $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ から得られるように、幾何学を内積の言葉で書き表すことは、大学初年度の線形代数の講義で学ぶ内積空間（inner-product space）の出発点である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この視点を発展させている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。