解答例

STEP II 2012、第 6 問

純粋数学 • 円に内接する四角形の面積

STEP II 2012、問 6

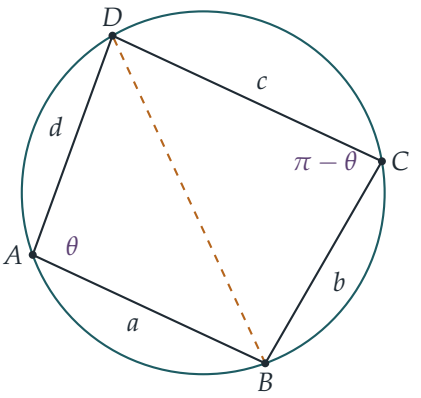
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q6

鍵となる考え方

対角線 BD は四角形を 2 つの三角形に分け、BD は余弦定理（cosine rule）によって 2 通りに表すことができる。円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）の特別な点は、向かい合う角（対角、opposite angles）の和が π になることであり、したがって C における角は $\pi - \theta$ である。すると $\cos C = -\cos\theta$、$\sin C = \sin\theta$ となり、余弦定理と面積の公式 $\frac{1}{2}xy\sin(\text{角})$ のどちらにも、ただ 1 つの角 θ しか現れない。あとは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と丁寧な因数分解（factorising）で片がつく。

解答



$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求める

$ABCD$ は円に内接するので、対角 DAB と BCD の和は π であり、$\angle BCD = \pi - \theta$ である。よって

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

対角線 BD に余弦定理を適用する。まず三角形 ABD（2 辺 a、d とその間の角 θ）で、次に三角形 CBD（2 辺 b、c とその間の角 $\pi-\theta$）で用いると

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

$\cos\theta$ を含む項をまとめると $2(ad+bc)\cos\theta = a^2+d^2-b^2-c^2$ となるので

$$\cos\theta = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

対角線 BD は四角形をこれら 2 つの三角形に分けるので、それらの面積の和が Q である：

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

（辺の長さはすべて正なので、$ad+bc$ で割ってよい。）

$16Q^2$ の公式

両方の式を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

両辺に $4(ad+bc)^2$ を掛けると

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

ブラーマグプタ（Brahmagupta）の公式

右辺は平方の差（difference of two squares）$X^2 - Y^2$ であり、$X = 2(ad+bc)$、$Y = a^2+d^2-b^2-c^2$ である。

考えてみよう $X-Y$ と $X+Y$ を 1 次因数の積にするにはどうすればよいか？

それぞれが再び平方の差になるように項をまとめる。a, d の項どうし、b, c の項どうしをまとめると

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

これらをさらにそれぞれ因数分解すると

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

$2s = a+b+c+d$ とおくと、各かっこは $2s$ から 1 辺の 2 倍を引いたものである。たとえば $b+c+d-a = 2s-2a$ である。したがって 4 つのかっこは $2(s-a)$、$2(s-d)$、$2(s-b)$、$2(s-c)$ であり

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{すなわち} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

三角形の面積

三角形の 3 頂点はその外接円（circumcircle）上にあるので、どんな三角形も円に内接する。ここで、D を円周に沿って A まで滑らせ、辺 DA を縮めて消してしまおう。すると $ABCD$ は 3 辺が a、b、c の三角形 ABC となり、$d = 0$ である。公式の両辺は D に関して連続的に変化するので、極限においても公式は成り立つ。$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ とすると、三角形の面積 Δ は

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{よって} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

を満たす。これがヘロン（Heron）の公式（Heron's formula）である。

検算

- 単位正方形は円に内接し $s = 2$ であり、$(2-1)^4 = 1$ はその面積に一致する。3 辺が 3–4–5 の三角形では $s = 6$ であり、$\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$ である。
- 長方形では $a = c$、$b = d$ なので $\cos\theta = 0$ となる。長方形の角はすべて $\frac{\pi}{2}$ なので、これは正しい。
- 円周上に 20 000 個の円に内接する四角形を無作為に配置し、$\cos\theta$、$\sin\theta$、Q^2 の公式を、実際の角および靴ひも公式（shoelace formula）による面積と比較した。両者は 3×10^{-12} 以内で一致した。ヘロンの公式も無作為な 1000 個の三角形で一致した。

よくある間違い

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ を忘れること。そうすると $+2bc\cos\theta$ がマイナスになり、その後がすべて台無しになる。
- $4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ を完全に展開しようとすること。平方の差として 2 回因数分解するほうがはるかに速く、間違いもずっと少ない。

STEP のその先へ

一般の（円に内接するとは限らない）四角形については、ブレートシュナイダー（Bretschneider）の公式が面積を与える。この公式では項 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$ が引かれる。ここで α と γ は 1 組の対角である。したがって、辺の長さを固定すると、円に内接する四角形の面積が最大となる。また、因数分解されたヘロンの公式の形から、面積が 0 になるのは三角不等式（triangle inequality）が等号になるときであり、かつそのときに限ることがただちにわかる。この流れをくむ幾何学をさらに学ぶには、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（邦題『幾何学再入門』）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。