解答例

STEP II 2012、第 5 問

純粋数学 • 逆数関数のグラフ

STEP II 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの曲線も逆数（reciprocal）の形をしているので、分母のグラフを頭の中で描き、それを「ひっくり返す」。分母が 0 になるところには鉛直漸近線（vertical asymptote）が現れ、分母が大きいところでは y は 0 に近く、分母の極値をとる点（turning point）は曲線の極値をとる点になる。小問 (ii) では、2 つの 2 次式の因数が a と b の中点に関して互いに鏡像になっているので、原点をその中点に移すと g は新しい変数の偶関数（even function）になり、停留点（stationary point）は t^2 の 2 次式から自然に求まる。

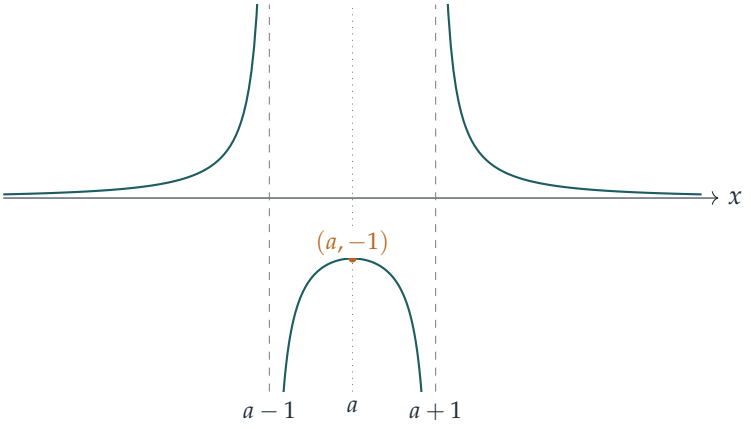
解答

小問 (i)

$D(x) = (x-a)^2 - 1$ とおくと、$f = 1/D$ である。分母 D は放物線（parabola）であり、$x = a$ に関して対称で、$x = a$ において最小値 -1 をとり、$x = a \pm 1$ で 0 になる。これを逆数に読み替えると、次のようになる。

- 曲線は $x = a$ に関して対称であり、鉛直漸近線は $x = a \pm 1$ である。
- $|x-a| < 1$ のとき $-1 \leq D < 0$ なので $f \leq -1$ であり、等号が成り立つのは $x = a$ のときに限る。よって $(a, -1)$ は極大点（local maximum）であり、x が内側から $a \pm 1$ に近づくとき $f \to -\infty$ となる。
- $|x-a| > 1$ のとき $D > 0$ であり、$|x-a|$ が大きくなるにつれて D は増加するので、f は正で、（漸近線の近くの）$+\infty$ から 0 に向かって減少する。x 軸は水平漸近線（horizontal asymptote）であり、$|x|$ が大きいとき $f \approx 1/x^2$ である。

実際、$f'(x) = -2(x-a)/D^2$ が 0 になるのは $x = a$ のときだけである。曲線は（$a \neq \pm 1$ のとき）y 軸と $1/(a^2-1)$ で交わるが、その位置は a によって変わるので、図は $x = a$ を基準にして描く。



小問 (ii)

$p = (x-a)^2 - 1$、$q = (x-b)^2 - 1$ とおくと、$g = 1/(pq)$ である。さらに

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d = \tfrac{1}{2}(b-a) > 0, \qquad t = x - c,$$

とおくと、$x - a = t + d$、$x - b = t - d$ となる。このとき $(t+d)(t-d) = t^2 - d^2$ および $(t+d)^2 + (t-d)^2 = 2t^2 + 2d^2$ を用いると、

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2 - 1\big)\big((t-d)^2 - 1\big) \\ &= (t^2 - d^2)^2 - (2t^2 + 2d^2) + 1. \end{aligned}$$

これは t^2 だけに依存するので、g は a と b の中点 $x = c$ に関して対称である。$u = t^2$、$h(u) = (u - d^2)^2 - 2u - 2d^2 + 1$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t} = 2t\,h'(u) = 2t\big(2(u - d^2) - 2\big) = 4t\,(t^2 - d^2 - 1).$$

$g' = -(pq)'/(pq)^2$ であるから、g の停留点は $(pq)' = 0$ となる点、すなわち

$$t = 0 \qquad \text{または} \qquad t = \pm\sqrt{d^2 + 1},$$

である。ただし、これらが漸近線上にない場合に限る。漸近線は $t = \pm(d+1)$ と $t = \pm(d-1)$ にあり、$d < \sqrt{d^2+1} < d+1$ であるから、外側の 2 つの停留点は常に本物の停留点である。a と b を用いて表すと、候補は

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \text{および} \qquad x = \frac{a+b \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4}}{2}.$$

これらの点での値は $h(0) = (d^2-1)^2$ および $h(d^2+1) = 1-2(d^2+1)-2d^2+1 = -4d^2$ である。

> **考えてみよう** これらの候補のうち実際に残るのはどれか。また、それらは極大か極小か。

それは $t=0$ が漸近線と一致するかどうか、すなわち $d=1$ かどうかによる。これはちょうど $b>a+2$（$d>1$）と $b=a+2$（$d=1$）の場合分けに対応する。各点の性質を調べるには、もう一度微分するのではなく、漸近線で区切られた各区間における g の符号と、区間の端での振る舞いを見る。

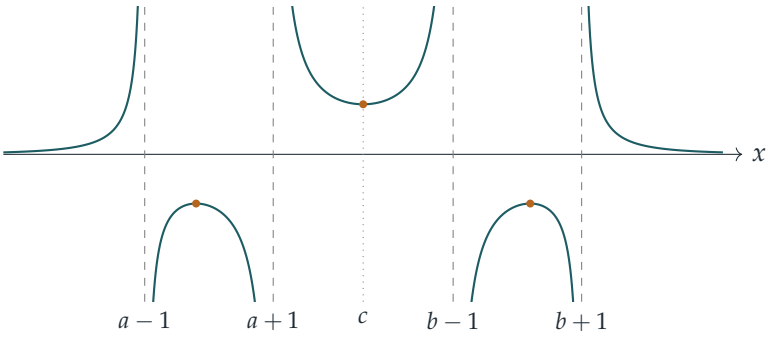
$b>a+2$ の場合。 このとき $d>1$ であり、4 本の漸近線は順に

$$t=-(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{すなわち} \quad x=a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

であり、すべて異なる。また c は $a+1$ と $b-1$ の間に（端点を含まずに）ある。

- **外側、$|t|>d+1$：** ここでは $|x-a|>1$ かつ $|x-b|>1$ なので $p,q>0$ であり、$g>0$ である。停留点はないので、g は漸近線での $+\infty$ から無限遠での 0 まで減少し、$1/x^4$ のように振る舞う。
- **中央、$|t|<d-1$、すなわち $a+1<x<b-1$：** ここでも $p,q>0$ なので $g>0$ であり、両端で $g\to+\infty$ となる。停留点は $t=0$ だけなので、これは極小点でなければならず、その値は
$$g(c)=\frac{1}{(d^2-1)^2}=\frac{16}{\big((b-a)^2-4\big)^2}.$$
- **2 つの隙間、$d-1<|t|<d+1$：** t が $(d-1,d+1)$ にあるとき、$|x-b|<1$ であるが $x-a>2d-1>1$ なので、$q<0<p$ となり $g<0$ であり、両端で $g\to-\infty$ となる。そこでの停留点は $t=\sqrt{d^2+1}$ だけなので、これは極大点でなければならず、その値は
$$g=\frac{1}{-4d^2}=-\frac{1}{(b-a)^2}.$$
隙間 $-(d+1)<t<-(d-1)$ はこれの鏡像である。

したがって停留点は 3 つある。$x=\frac{1}{2}(a+b)$ における極小点と、$x=\frac{1}{2}\big(a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}\big)$ における 2 つの極大点であり、後者はいずれも $y=-1/(b-a)^2$ である。下の図は $b-a=4.8$ の場合であり、極値をとる点が見えるように y 方向を引き伸ばしてある。



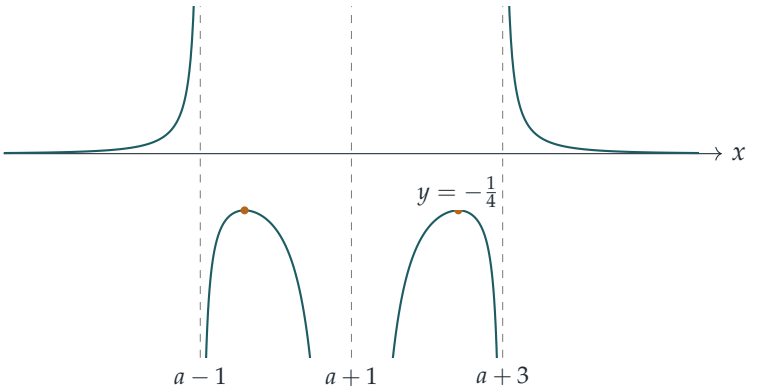
$b = a + 2$ の場合。 このとき $d = 1$ なので $a + 1 = b - 1 = c$ となり、中央の 2 本の漸近線は $x = a + 1$ の 1 本に重なる。$t = x - a - 1$ とおくと、

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

であるから、漸近線は $x = a - 1$、$a + 1$、$a + 3$ の 3 本である。候補 $t = 0$ はここでは停留点ではなく漸近線であり、残るのは $t = \pm\sqrt{2}$ だけである。

- $|t| > 2$ のとき、先と同様に $g > 0$ であり、g は $+\infty$ から 0 まで減少する。
- $0 < |t| < 2$ のとき $g < 0$ であり、$t \to 0$ のとき（ここで $g \approx -1/(4t^2)$ なので、両側とも下に向かう）も $|t| \to 2$ のときも $g \to -\infty$ となる。よって $t = \sqrt{2}$ における停留点は極大点であり、$g = 1/\big(2 \cdot (-2)\big) = -\frac{1}{4}$ である。$t = -\sqrt{2}$ においても同様である。

したがって停留点は $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$ にあり、いずれも $y = -\frac{1}{4}$ の極大点である。（これは一般の公式と一致する。$b - a = 2$ とすると $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$ となり、$-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$ である。）このとき曲線は、$x = a - 1$ と $x = a + 3$ の間では決して x 軸より上に出ない。



検算

- $a=0$、$b=5$ のとき、$g(2.5)=1/\left((6.25-1)^2\right)=1/27.5625$ であり、公式 $16/(25-4)^2=16/441$ も同じ値、約 0.0363 を与える。$x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\approx 5.193$ において直接計算すると $g\approx -0.04=-1/25$ となる。
- 第 1 の場合で $b\to a+2$ とすると、極小値 $16/\left((b-a)^2-4\right)^2$ は発散する。これは中央の枝が重なった漸近線の中に消えていくことと合っている。
- ランダムな a と b について g' の符号変化を数値的に調べると、$b>a+2$ のときはちょうど 3 つ、$b=a+2$ のときは 2 つの停留点が、上で求めた位置に見つかる。

よくある間違い

- pq を x の 4 次式（quartic）として展開し、3 次式 $(pq)'$ を直接因数分解しようとすること。それでも解けるが、対称性を利用した置換 $t=x-c$ を使えば因数分解はすぐにできる。
- $b=a+2$ の場合に、点 $x=a+1$ が極値をとる点ではなく漸近線（分母の 2 重の零点）であることを見落とすこと。
- 隙間の区間で g の符号を間違えること。そこでは p、q のうちちょうど一方が負なので、$g<0$ である。

STEP のその先へ

D から $1/D$ のグラフを描くことは、関数を定性的に考えることの最初の体験である。符号、零点、対称性、無限遠での振る舞いがわかれば、微積分を使う前にほとんどすべてがわかる。置換 $t=x-\frac{1}{2}(a+b)$ は、対称性を利用して 4 次式を t^2 の 2 次式に帰着させるものであり、この手法は代数学や解析学の至るところで繰り返し現れる。このようなグラフの背後にある極限や漸近線の厳密な扱いについては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この種の問題をさらに多く解きたい場合は Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。