解答例

STEP II 2012、第 4 問

純粋数学 • 対数級数の不等式

> **STEP II 2012、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q4

鍵となる考え方

すべては $\ln(1+x)$ の級数（series）展開と、e^t が単調増加（increasing）であるという事実から導かれる。$(1+\frac{1}{n})^n$ と e を比較するには対数をとればよい。すなわち、$n\ln(1+\frac{1}{n})$ と 1 を比較すればよいのである。項が小さくなっていく交代級数（alternating series）は、2 項ずつ括弧でまとめることで初項より小さいことが示せる。また、組み合わせ $\ln\frac{1+x}{1-x}$ では負の項がすべて消えるので、これは初項より大きい。この二つの評価ではさみこめば極限が得られる。

解答

小問 (i)

$n>1$ かつ $k\geq 1$ であるから $(k+1)n>n>1$ であり、当然 $(k+1)n>k$ が成り立つ。両辺に $n^k>0$ を掛けると

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

となり、これらの正の数の逆数をとると不等号の向きが逆になる：

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

ここで級数に $x=\frac{1}{n}$ を代入する。$n>1$ より $0<x<1$ であるから、これは許される。初項以降の項を 2 項ずつまとめると

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

各括弧は k を偶数として $\frac{1}{kn^k} - \frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$ の形をしており、いま証明した不等式により真に正である。

考えてみよう 無限級数をこのように括弧でまとめてよいのだろうか？

よい。この級数は収束（converge）するからである。項数が奇数の部分和（partial sum）は、部分和全体のなす数列の部分列（subsequence）をなすので、同じ極限 $\ln(1+\frac{1}{n})$ に収束する。括弧でまとめた級数は、ちょうどこの奇数項の部分和の列にほかならない。

括弧でまとめた級数の部分和は $\frac{1}{n} - b_1$, $\frac{1}{n} - b_1 - b_2$, ... であり、ここですべての $b_j > 0$ である。これらは減少していくので、いずれも $\frac{1}{n} - b_1$ 以下であり、したがってその極限も同様である：

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n} - b_1 < \frac{1}{n}, \qquad b_1 = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} > 0.$$

（b_1 を別にとっておくことで、最後の不等式が真の不等式になる。そうしなければ、$\frac{1}{n}$ より小さい数の極限が $\frac{1}{n}$ に等しくなる可能性がある。）

$n > 0$ を掛けると $n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1$、すなわち $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right) < 1$ を得る。指数関数（exponential function）は単調増加であるから

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

小問 (ii)

$x = \frac{1}{2y}$ とおく。$y > \frac{1}{2}$ より $0 < x < 1$ であるから、x と $-x$ はともに級数が成り立つ範囲にある：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

項ごとに引き算すると（二つの収束する級数に対しては正当な操作である）、偶数乗の項は打ち消し合い、奇数乗の項は 2 倍になる：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

ここで

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}} = \frac{2y+1}{2y-1},$$

であるから、$2x = \frac{1}{y}$ を用いて

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right) = \frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3} + \frac{2}{5(2y)^5} + \cdots = \frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

初項以降の各項は（$y > 0$ より）真に正であるから、第 2 項以降までの部分和はすべて $\frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3}$ 以上であり、したがって

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right) \geq \frac{1}{y} + \frac{2}{3(2y)^3} > \frac{1}{y},$$

となって、示すべき不等式が得られる。

次の結論を導くには、分数が $1 + \frac{1}{n}$ となるように y を選べばよい。$y = n + \frac{1}{2}$ とおくと（これはすべての正の整数 n に対して $\frac{1}{2}$ より大きい）

$$\frac{2y+1}{2y-1} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n},$$

であるから

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

$n + \frac{1}{2} > 0$ を掛けると $\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(1 + \frac{1}{n}) > 1$ となり、指数をとると（ここでも単調増加関数である）

$$\mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

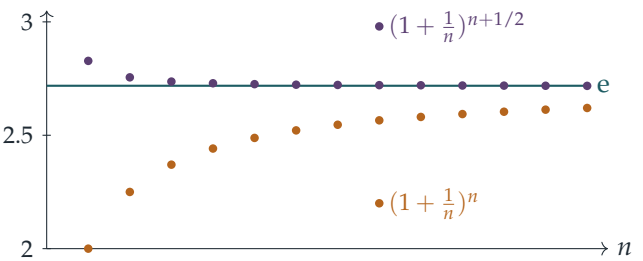
小問 (iii)

小問 (ii) の結果を $(1 + \frac{1}{n})^{1/2} > 0$ で割り、小問 (i) と組み合わせると、$n \geq 2$ を満たすすべての整数に対して

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

$n \to \infty$ のとき $1 + \frac{1}{n} \to 1$ であるから、$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1$（平方根は連続（continuous）である）となり、左辺は e に収束する。右辺は定数 e である。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}.$$



検算

$n = 10$ のとき、$(1.1)^{10} \approx 2.5937$、$(1.1)^{10.5} \approx 2.7203$ であり、確かに $\mathrm{e} \approx 2.7183$ をはさんでいる。$n = 1000$ のときは、下からの評価 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001} \approx 2.7169237$ が $(1.001)^{1000} \approx 2.7169239$ のわずかに下にあり、はさみこみがいかにきついかがわかる。また、数千までのすべての n について二つの真の不等式を確かめ、さらに $y > \frac{1}{2}$ を無作為に選んで、小問 (ii) の級数の和が $\ln \frac{2y+1}{2y-1}$ になることを数値的に確かめた。

よくある間違い

- 小問 (i) で $x = 1$ を代入してしまうこと。級数は $|x| < 1$ に対してしか与えられておらず、そのためにそこでは $n > 1$ が必要なのである（小問 (iii) では大きな n しか用いないので、何も失われない）。
- 真の不等式の極限から、そのまま真の不等式を結論してしまうこと。極限で保たれるのは $\leq$ だけである。$<$ を得るには、正の項を一つ別にとっておくこと。
- 指数をとって不等式が保たれるのは e^t が単調増加だからにほかならない、ということを忘れること。そのことは明記すべきである。

STEP のその先へ

これらの評価からは極限以上のことがわかる。$(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1+\frac{1}{2n}$ であるから、誤差 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ はおよそ $\mathrm{e}/(2n)$ の大きさであり、この数列の収束はかなり遅い。収束する級数の並べ替え、部分和の比較、はさみうちの原理は、大学最初の解析学（analysis）の講義では日常的に使う道具であり、そこでは微妙な点にも出会う（条件収束（conditionally convergent）する級数を並べ替えると、和が変わることがあるのだ !）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門の定評ある教科書）は、これらすべてを見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。