解答例

STEP II 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 2012、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q3

鍵となる考え方

扱いにくい式 $x+\sqrt{1+x^2}$ は、t と名付けてくれと言わんばかりである。この置換（substitution）がうまくいく決め手は、その逆数が $\sqrt{1+x^2}-x$ になることである。そのため、t と $1/t$ の和と差をとれば、x と $\sqrt{1+x^2}$ がどちらも t の簡単な関数として表せる。その後は、二つの積分のそれぞれについて、被積分関数（integrand）を $x+\sqrt{1+x^2}$ だけの関数として書く方法を見抜けばよい。

解答

恒等式

$t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおく。共役（conjugate）な式を掛けると、

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

これら二つの式の差と和をとると、

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

このうち一つ目の式は x を t の関数として直接与えるので、

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

積分区間については、$x=0$ のとき $t=1$ であり、$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ である。また、t は x の狭義単調増加関数である（$x\geq 0$ において x も $\sqrt{1+x^2}$ も増加する）から、この置換は $[0,\infty)$ 上で一対一（one-to-one）である。したがって

$$\int_0^\infty f(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。

一つ目の積分

考えてみよう 分母 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ は、どうすれば $x+\sqrt{1+x^2}$ の関数になるだろうか。

2乗してみる。$(x+\sqrt{1+x^2})^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ であり、これはちょうど分母に一致する。よって被積分関数は $f(t)=1/t^2$ としたときの $f(x+\sqrt{1+x^2})$ であり、恒等式より

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-2}+t^{-4})\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\Big]_1^\infty = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{3}.$$

二つ目の積分

$x=\tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$、すなわち $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ である。θ が0から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、x は0から ∞ まで動く。$0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$ より $\cos\theta>0$ であるから、$\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$ であり、

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

となる。ここでも $t=x+\sqrt{1+x^2}$ である。よって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 被積分関数にはまだ $\sqrt{1+x^2}$ が残っている。これを t で表すにはどうすればよいだろうか。

それは最初の部分ですでに求めてある。$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$ である。よって被積分関数は

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4}),$$

となり、$t=x+\sqrt{1+x^2}$ だけの関数である。$f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$ として恒等式を用いると、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty (t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6})\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\Big(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.$$

検算

- 簡単な f で恒等式を確かめる。$f(t) = 1/t^3$ とすると右辺は $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$ であり、左辺を数値積分（numerical quadrature）しても 0.375 が得られる。
- もとの二つの積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.666667 と 0.466667 が得られ、$\frac{2}{3}$ と $\frac{7}{15}$ に一致する。
- 大きさの妥当性の確認：$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で被積分関数 $1/(1+\sin\theta)^3$ は 1 から $\frac{1}{8}$ まで減少するので、積分の値は $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$ と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ の間にある。値 $\frac{7}{15} \approx 0.47$ は十分にこの範囲内に収まっている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ を求めてから、それを苦労して t で表そうとすること。先に x を t の関数として書き、それを微分するほうがずっと速い。
- 二つ目の積分で、$\mathrm{d}\theta$ から生じる因子 $1/(1+x^2)$ を忘れること、あるいは被積分関数の $\sqrt{1+x^2}$ を $\frac{1}{2}(t+1/t)$ に書き換えずに残してしまうこと。

STEP のその先へ

置換 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ の正体は、$x = \sinh u$ としたときの $t = \mathrm{e}^u$ である。実際 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ であり、公式 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$、$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$ は $\sinh u$ と $\cosh u$ を指数関数で書いたものにすぎない。このような双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）は、$\sqrt{1+x^2}$ を含む積分に対して大学 1 年次で学ぶ標準的な手法である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の STEP の積分問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。