解答例

STEP II 2012、第 2 問

純粋数学 • 多項式の合成

> **STEP II 2012、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q2

鍵となる考え方

次数（degree）は合成（composition）によって掛け算される。そのため、p を何回か反復（iteration）すると、次数はすぐに右辺と一致しえないほど大きくなってしまう。次数を比較すれば p の次数が決まり、そのあとは p を未知の係数（coefficients）を使って書き下せば、各小問は短い代数計算になる。(ii) には巧みな近道がある。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ はそれ自体が$\mathrm{p}(x)$ についての二次式（quadratic）であるから、左辺全体が $\mathrm{p}(x)$ の二次式となり、平方完成（completing the square）によって片がつく。

解答

合成関数の次数

$a_m, b_n \neq 0$ として、$\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$、$\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$ と書く。$\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$ において、項 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$ の次数は mn で、最高次の係数（leading coefficient）は $a_m b_n^m \neq 0$ である。一方、他のすべての項の次数は高々 $(m-1)n < mn$ である（$n \geq 1$ のとき）。よって最高次の項を打ち消すものはなく、

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

（$n = 0$ のときは $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$ は定数であり、この場合も $mn = 0$ である。）

小問 (i)

p の次数を m とする。

$m \geq 2$ ならば、上の結果より $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$ の次数は m^3 であり、$3\mathrm{p}(x)$ の次数は $m < m^3$

である。よって左辺の次数は $m^3 \geq 8$ となるが、右辺 $-2x$ の次数は 1 である。これは不可能である。

$m = 0$ ならば、定数 c を用いて $\mathrm{p}(x) = c$ と書け、左辺は定数 $c - 3c = -2c$ となる。これはすべての x について $-2x$ に等しくなることはない。これも不可能である。

したがって $m = 1$ である。$a \neq 0$ として $\mathrm{p}(x) = ax + b$ と書く。すると

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

であり、方程式は

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{任意の} x.$$

となる。二つの多項式（polynomial）がすべての x について一致するのは、係数がすべて一致するときに限るから、

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{かつ} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

$a = 1$ は第一式の解であるから、第一式は $(a - 1)^2(a + 2) = 0$ と因数分解でき、$a = 1$ または $a = -2$ を得る。第二の条件は $(a - 1)(a + 2)b = 0$ であり、これは b が何であっても、これら二つの値のどちらについても自動的に成り立つ。よって解はちょうど

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{および} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b \text{ は任意の定数.}$$

である。二つ目の族を検算しておく。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$ であるから、左辺は $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$ となる。

小問 (ii)

p の次数を m とする。左辺の三つの項の次数はそれぞれ m^2、$2m$、m である。

- $m \geq 3$ ならば $m^2 > 2m > m$ であるから、左辺の次数は $m^2 \geq 9 \neq 4$ となる。
- $m = 1$ ならば左辺の次数は高々 2 であり、$m = 0$ ならば左辺は定数である。いずれも x^4 に等しくなりえない。

したがって $m = 2$ である。（このとき $m^2 = 2m = 4$ であるから、$2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ と $3[\mathrm{p}(x)]^2$ の最高次の項は同じ次数をもち、それらの係数を調べなければならない。）

$a \neq 0$ として $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$ と書き、記述を簡単にするため P で $\mathrm{p}(x)$ を表す。

考えてみよう 本当に $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ をすべて展開しなければならないだろうか？

その必要はない。定義より $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$ であるから、左辺は

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a+3)P^2 + (2b-4)P + 2c,$$

となり、P の二次式である。P^2 の最高次の項（leading term）は a^2x^4 であり、P の次数は 2 にすぎないから、この式の x^4 の係数は $(2a+3)a^2$ である。これを x^4 と比較すると

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (a+1)^2(2a-1) = 0,$$

（解 $a=-1$ を見つけて割ればよい）となり、$a=-1$ または $a=\frac{1}{2}$ である。

ここで簡単な事実を用いる。$S(x)$ が多項式で、定数 K について $S(x)^2 = x^4 + K$ が成り立つならば、$(S-x^2)(S+x^2) = K$ である。S の最高次の項が $\pm x^2$ のとき、どちらの因数も零多項式でないとすると、少なくとも一方の次数は 2 となり、積は定数になりえない。よって、最高次の項が $\pm x^2$ である S については、一方の因数が零であり、ちょうど $S = \pm x^2$ となる。

$a=-1$ の場合。このとき $2a+3=1$ であり、平方完成すると

$$P^2 + (2b-4)P + 2c = \big(P + b - 2\big)^2 - (b-2)^2 + 2c = x^4.$$

よって $S = P + b - 2 = -x^2 + bx + (c+b-2)$ は定数 K について $S^2 = x^4 + K$ を満たし、最高次の項は $-x^2$ である。すると $S + x^2 = bx + (c+b-2)$ の次数は 2 未満であり、$S - x^2$ の次数は 2 であるから、上の事実より $S + x^2 = 0$ でなければならない。すなわち $b=0$ かつ $c+b-2=0$ である。よって $b=0$、$c=2$ であり、このとき $K = (b-2)^2 - 2c = 0$ となって矛盾はない。これより

$$\mathrm{p}(x) = 2 - x^2.$$

$a=\frac{1}{2}$ の場合。このとき $2a+3=4$ であり、

$$4P^2 + (2b-4)P + 2c = \left(2P + \tfrac{b-2}{2}\right)^2 - \tfrac{(b-2)^2}{4} + 2c = x^4.$$

ここで $S = 2P + \frac{b-2}{2} = x^2 + 2bx + 2c + \frac{b-2}{2}$ の最高次の項は x^2 であるから、同様にして $S - x^2 = 0$、すなわち $b=0$ かつ $2c-1=0$ である。よって $b=0$、$c=\frac{1}{2}$ であり、$K = \frac{(b-2)^2}{4} - 2c = 1 - 1 = 0$ となって矛盾はない。これより

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

各段階はすべて逆にたどれるから、どちらも実際に解であるが、直接確かめておくと安心である。$\mathrm{p}(x) = 2 - x^2$ については $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 2 - (2-x^2)^2 = -x^4 + 4x^2 - 2$ であり、

$$2(-x^4 + 4x^2 - 2) + 3(x^4 - 4x^2 + 4) - 4(2 - x^2) = x^4.$$

$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$ については $u = x^2+1$ とおくと $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \frac{1}{4}u^2+1$ であり、左辺は $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u = (u-1)^2 = x^4$ となる。

以上より、(ii) の方程式を満たす多項式はちょうど $\mathrm{p}(x) = 2-x^2$ と $\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$ である。

検算

- (i) で $b = 1$ を試す。$\mathrm{p}(x) = x+1$ のとき $(x+3)-3(x+1) = -2x$ となる。
- (ii) で $x = 1$ を代入する。$\mathrm{p}(x) = 2-x^2$ については $\mathrm{p}(1) = 1$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(1)) = 1$ であり、$2+3-4 = 1 = 1^4$ となる。$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$ については $x = 3$ で $\mathrm{p}(3) = 5$、$\mathrm{p}(5) = 13$ であり、$26+75-20 = 81 = 3^4$ となる。
- さらに厳密な算術計算により、(i) の二つの族が多数の無作為な b について成り立つこと、また b, c を $\frac{1}{4}$ 刻みでとった二次式の格子を探索すると、(ii) の二つの解しか見つからないことも確かめた。

よくある間違い

- (ii) で、左辺の次数を単純に m^2 だと思い込むこと。$m = 2$ のとき、項 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ と $3[\mathrm{p}(x)]^2$ はともに次数 4 であり、それらが打ち消し合う可能性があるからこそ、a を $2a^3+3a^2 = 1$ から求めなければならないのである。
- (i) で次数が 1 でなければならない理由を説明する際に、$m = 0$ の場合を忘れること。
- (i) で $a = 1$ または $a = -2$ で止めてしまい、特定の b に固定すること。定数項の条件はすべての b について成り立つ。

STEP のその先へ

規則 $\deg(\mathrm{p}\circ\mathrm{q}) = \deg\mathrm{p}\cdot\deg\mathrm{q}$ は、$\deg(\mathrm{pq}) = \deg\mathrm{p}+\deg\mathrm{q}$ と同様に、係数の中に零因子（zero divisors）が存在しないことに依存している。零でない二つの数の積が零になりうる環（ring）では、最高次の項が消えることがあり、どちらの規則も成り立たなくなる。$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ のような関数方程式（functional equations）は、反復写像と力学系（dynamics）の研究にもつながっている。多項式環と、次数による議論が通用する場合については、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。