解答例

STEP II 2012、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン過程と最近接距離

> **STEP II 2012、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.19 節「**平面上のランダムな点**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/spatial-poisson.html

鍵となる考え方

「最寄りのスーパーマーケットまでの距離が y 以上である」という事象は、「選んだ点を中心とする半径 y の円の中にスーパーマーケットが 1 軒もない」という事象とまったく同じであり、その確率はポアソンモデル（Poisson model）から直接わかる。これにより Y の累積分布関数（cumulative distribution function）が得られ、それを微分すれば確率密度関数（density）が得られる。モーメント（moments）はガウス型積分（Gaussian-type integrals）になる。部分積分（integration by parts）を 1 回行えば $\mathrm{E}(Y)$ は仮定してよい積分に帰着し、置換（substitution）$u = y^2$ によって $\mathrm{E}(Y^2)$ は初等的に計算できる。

解答

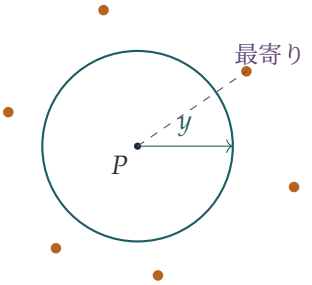
以下では、領域は十分に広く境界効果（edge effects）は無視できるものとする。したがって、問題となるどの y についても、選んだ点を中心とする半径 y の円は領域の内部に収まる。

円の中にスーパーマーケットがない確率

半径 y の円の内部にあるスーパーマーケットの数を N とする。この円の面積は πy^2 であるから、$N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$ であり、

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y の分布



無作為に選んだ点を P とする。最寄りのスーパーマーケットが P から距離 y 以上離れているのは、P を中心とする半径 y の開円板にスーパーマーケットが 1 軒も含まれないときであり、またそのときに限る。よって、$y \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{したがって} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

（Y は連続型であるから、$<$ と書いても $\leq$ と書いても違いはない。）これが Y の累積分布関数 $F(y)$ であり、距離は負にならないので $y < 0$ では $F(y) = 0$ である。$y \geq 0$ において微分すると

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

となり、これが求める確率密度関数である。簡単な確認として、$y \to \infty$ のとき $F(y) \to 1$ であるから、f の積分は 1 になる。

平均

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

考えてみよう 指数関数の前に y^2 があるとき、与えられた積分をどのように使えばよいだろうか。

被積分関数を $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$ と分ける。2 つ目の因子は $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ の導関数である。$u = y$ として部分積分すると

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

となる。ここで、$y \to \infty$ のとき $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$ であり（指数関数のほうが速く減少する）、$y = 0$ でも 0 になることを用いた。次に指数を $-\frac{1}{2}x^2$ に合わせる。$\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$、すなわち $y = x/\sqrt{2\pi k}$、$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$ とおく。積分区間は 0 から ∞ のままであるから

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

分散

$\mathrm{E}(Y^2)$ については、与えられた積分はまったく必要ない。y の奇数乗が現れるので、$u = \pi k y^2$、$\mathrm{d}u = 2\pi k y\, \mathrm{d}y$ と置換できるからである。

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{u}{\pi k}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} u\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

ここで $\int_0^{\infty} u\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = 1$ を用いた（部分積分で示せるし、パラメータ 1 の指数分布（exponential distribution）の平均と見ることもできる）。したがって

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4 - \pi}{4\pi k},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- **スケーリング。** スーパーマーケットの密度が k 倍になれば、長さは $\sqrt{k}$ 分の 1 に縮むはずである。よって $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$、$\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$ となるべきであり、どちらの答えもこの形をしている。
- **正値性。** $4 - \pi > 0$ であるから分散は正であり、当然そうでなければならない。
- **数値計算。** $k = 1$ として確率密度関数を中点則（midpoint quadrature）で数値積分すると $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$、$\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$ となり、$(4 - \pi)/(4\pi) \approx 0.06831$ と一致する。ある点の周囲にスーパーマーケットをポアソン分布に従って無作為に配置するシミュレーションを 10^5 回行ったところ、平均 0.4996、分散 0.0681 が得られた。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ と書いてしまう。これは距離 y 以内にスーパーマーケットが *1* **軒もない**確率、すなわち $\mathrm{P}(Y \geq y)$ である。

- $x = \sqrt{2\pi k}\,y$ ではなく $x = \sqrt{\pi k}\,y$ と置換してしまう。すると仮定された $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ ではなく e^{-x^2} が現れ、答えが $\sqrt{2}$ 倍ずれる。

STEP のその先へ

ここでのスーパーマーケットは平面上の**ポアソン点過程**（Poisson point process）をなしている。これは「完全な空間的ランダムネス」の基本モデルであり、森の木々、空の星、携帯電話の基地局などのモデルに用いられる。Y の分布は**レイリー分布**（Rayleigh distribution）であり、これは 2 つの成分が独立な正規分布に従うベクトルの長さの分布としても現れる。また、今回の部分積分で明らかになった簡潔な裾の公式 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$ は、任意の非負の確率変数について成り立つ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、ポアソン過程やこうした裾の積分の考え方が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。