解答例

STEP II 2012、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP II 2012、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q12

鍵となる考え方

スイッチを押すとその状態は**反転する**（toggle）。したがって、廊下にあるプール用のスイッチが最後にオンになっているのは、最初からオンで手を触れられなかった場合か、最初はオフで押された場合のどちらかである。台所の側は、実は見かけ倒しの「おとり」である。確率 $\frac{1}{2}$ でオンであるスイッチは、反転されてもされなくても、確率 $\frac{1}{2}$ でオンのままである。小問 (i) で一つの条件付き確率（conditional probability）が求まれば、7 回の月曜日は二項分布（binomial distribution）に従う試行となり、「最頻値（mode）が 3 である」という条件は、隣り合う二項確率どうしの一組の不等式に帰着される。

解答

小問 (i)

次の事象を定める。

- H：客が廊下にあるプール用のスイッチを押す。よって $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$ である。
- A：最初の時点で廊下のスイッチがすべてオンである。よって $\mathrm{P}(A) = p$ である。
- L：最後にプールの照明がついている。

客はスイッチを無作為に選ぶので、H は A と独立（independent）である。

廊下。押した後に廊下のプール用スイッチがオンであるのは、A が起こり H が起こらない場合（オンで手を触れられなかった）か、A が起こらず H が起こる場合（オフで、

反転されてオンになった）のちょうどどちらかのときである。よって

$$\mathrm{P}(\text{最後に廊下のプール用スイッチがオン}) = p\cdot\tfrac{3}{4} + (1-p)\cdot\tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

台所。台所にあるプール用のスイッチは、最初に確率 $\frac{1}{2}$ でオンである。押されなければそのままであり、押されれば反転する。確率 $\frac{1}{2}$ でオフであるスイッチは、反転すると確率 $\frac{1}{2}$ でオンになる。いずれにせよ、客が台所で何をしようと、このスイッチが最後にオンである確率は $\frac{1}{2}$ である。

台所のスイッチの状態と客の台所での選択は、廊下で起こることすべてと独立であるから

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

条件付き確率を求める。$H\cap L$ が起こるためには、客が廊下のプール用スイッチを押し、そのスイッチが最初はオフであり（押すとオンになるように）、さらに台所のスイッチが最後にオンでなければならない。

$$\mathrm{P}(H\cap L) = \frac{1}{4}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(H\mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

$q = \dfrac{1-p}{1+2p}$ とおく。各月曜日には照明がついていたことがわかっているので、小問 (i) より、廊下のプール用スイッチが押された確率は q であり、これは週ごとに独立である（客はそれぞれ独立に行動し、初期状態も月曜日ごとに新たに定まる）。よって、スイッチが押された日数 X は

$$X \sim \mathrm{B}(7, q).$$

を満たす。$1-q$ も必要である。

$$1-q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

（ここで $p>0$ である。$p=0$ ならば $q=1$ であり、確実に $X=7$ となるので、3 が最頻値になることはありえない。）

考えてみよう 「3 が最頻値である」という条件を、計算できる形にするにはどうすればよいか。

隣り合う確率を比べる。$1 \le k \le 7$ に対して

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k}q^k(1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1}q^{k-1}(1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k}\cdot\frac{q}{1-q}.$$

因子 $\frac{8-k}{k}$ は k の増加に伴って狭義単調減少するので、確率はこの比が 1 を超えている間は増加し、1 を下回ると減少する。したがって、3 が（ただ一つの）最頻値となるのは、$k=2$ から $k=3$ で確率が増加し、$k=3$ から $k=4$ で確率が減少するとき、かつそのときに限る。

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4}\cdot\frac{q}{1-q} < 1.$$

（必要な向きについては、この二つの条件だけで十分である。3 が最頻値ならば、当然 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=2)$ かつ $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=4)$ である。）

$\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$ を代入し、正の量 $3p$ を両辺に掛けると

- 二つ目の条件から $1-p < 3p$、すなわち $p > \frac{1}{4}$ を得る。
- 一つ目の条件から $\frac{5}{3}(1-p) > 3p$、すなわち $5-5p > 9p$ となり、$p < \frac{5}{14}$ を得る。

したがって $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$ となり、題意が示された。

検算

- $p=0$ のとき廊下のスイッチはすべてオフなので、照明がつくのはプール用スイッチが押された場合に限る。小問 (i) の式は $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$ を与え、確かにそうなっている。$p=1$ のときは、そのスイッチが押されなかった場合に限り照明がつき、式は 0 を与える。
- 端点は $q=\frac{1}{2}$（$p=\frac{1}{4}$ のとき）と $q=\frac{3}{8}$（$p=\frac{5}{14}$ のとき）に対応する。$q=\frac{1}{2}$ では $\mathrm{B}(7,\frac{1}{2})$ が対称なので 3 と 4 が同率となり、$q=\frac{3}{8}$ では $(n+1)q=3$ となって 2 と 3 が同率となる。よって、不等号が狭義であることはまさに正しい。
- 小問 (i) は、すべての初期状態とすべてのスイッチの選び方を分数で厳密に列挙して確認した。小問 (ii) は、刻み幅 $\frac{1}{2800}$ の格子上の p について $\mathrm{B}(7,q)$ の確率を計算して確認した。ただ一つの最頻値が 3 となるのは、ちょうど $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$ のときである。

よくある間違い

- すでにオンのスイッチを押すとオフになることを忘れる。廊下の計算では、「オン」に至る二つの経路の両方が必要である。

- 答えは単に $\frac{1}{2}$ なのに、台所を場合分けして計算する。場合分け自体は害はないが、計算ミスを起こしやすい箇所である。
- 小問 (ii) で、二項分布のパラメータとして q ではなく p を使う。照明がついているという条件付けこそが、スイッチが押される確率を $\frac{1}{4}$ から q に変えているのである。

STEP のその先へ

小問 (i) はベイズの定理（Bayes' theorem）の実践例である。観測（照明がついている）によって、客がスイッチを押した確率が $\frac{1}{4}$ から $\frac{1-p}{1+2p}$ へと更新される。小問 (ii) はこの考え方を逆向きに用い、与えられた最頻値と矛盾しない未知パラメータ p の値はどれかを問うている。これは統計的推測（statistical inference）と最尤推定（maximum likelihood estimation）の萌芽である。連続する項の比を用いて最頻値を求める手法は、多くの離散分布（ポアソン分布、超幾何分布）に対して有効である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き確率とこれらの分布を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。