解答例

STEP II 2012、第 11 問

力学 ・ 非弾性衝突

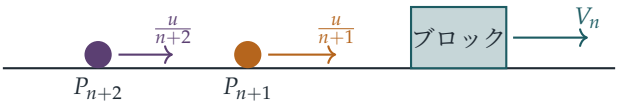
> **STEP II 2012、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q11

鍵となる考え方

各粒子が運ぶ運動量（momentum）に注目する。質量 im に速さ u/i を掛けると mu となり、これはどの粒子でも同じである。したがって n 個の粒子が取り込まれた後のブロックの運動量は単に nmu であり、運動量保存則（conservation of momentum）からその速さがただちに求まる。次の粒子が到達するかどうかは 2 つの速さの比較に帰着し、エネルギーの損失は「入ってきた運動エネルギー（kinetic energy）から出ていく運動エネルギーを引いたもの」である。

解答

ブロックと粒子を、なめらかな面上の一直線に沿って動く質点としてモデル化する。したがって水平方向の外力ははたらかず、直線方向の運動量はすべての衝突で保存される。粒子はブロックにめり込むので、各衝突は完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）である。



n 回目の衝突後の速さ

粒子 P_i の運動量は $im \cdot \frac{u}{i} = mu$ であり、i によらない。

n 番目の粒子がブロックに衝突するとする。このとき、粒子 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ はそれより前に衝突していなければならない。粒子は順に発射され、それぞれ直前の粒子より遅い

（u/i は減少する）ので、後の粒子が前の粒子を追い越すことはなく、またどの粒子もブロックに当たらずに通り過ぎることはできないからである。よって n 回目の衝突の直後、ブロックは $P_1, \ldots, P_n$ を含み、その質量は

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big)$$

である。ブロックは静止状態から動き始め、取り込まれた各粒子は運動量 mu をもたらしたので、運動量保存則より全運動量は現在 nmu である。したがって n 回目の衝突後のブロックの速さ V_n は

$$m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)}$$

を満たし、これが求める結果である。

$2k = N(N+1)$ のときの衝突回数

n 回の衝突の後、ブロックは一定の速さ V_n で動く（面はなめらかである）。ブロックの後方にある粒子 P_{n+1} がブロックに追いつくのは、それがブロックより真に速いとき、かつそのときに限る：

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1).$$

ここで正の量 $n+1$ と $2k + n(n+1)$ を両辺に掛けた。（$n = 0$ のときこれは $2k > 0$ となり、確かに成り立つ。P_1 は静止しているブロックに必ず当たる。）

考えてみよう 一度ある粒子が外れたら、その後の粒子がブロックに当たることはありうるだろうか？

ありえない。P_{n+1} がブロックに追いつけなければ、ブロックはその後ずっと速さ $V_n \geq \frac{u}{n+1}$ を保ち、$i > n+1$ に対して $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$ であるから、それ以降の粒子はさらに遅い。したがって衝突するのは、$P_1, P_2, \ldots$ のうち、初めて外れる粒子の直前までのものちょうどである。

ここで $2k = N(N+1)$ とする。$n(n+1)$ は $n \geq 0$ において狭義単調増加（strictly increasing）であるから、P_{n+1} が当たる条件は $n(n+1) < N(N+1)$、すなわち $n < N$ となる。よって $P_1, \ldots, P_N$ はすべてブロックに当たり、P_{N+1} は当たらない。$n = N$ のとき等号が成り立ち、実際

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1}$$

となって、これは P_{N+1} の速さにちょうど等しい。したがってこの粒子はブロックの後方に一定の距離を保ったままである。以上より、衝突はちょうど N 回である。

失われる運動エネルギー

衝突に関わるのは $P_1, \ldots, P_N$ だけなので、損失の総量は、これらの粒子の発射時の運動エネルギー（ブロックは静止状態から始まる）からブロックの最終的な運動エネルギーを引いたものである。

初めは、

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\left(\frac{u}{i}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

最終的にブロックの質量は $m\big(k + \frac{1}{2}N(N+1)\big) = mN(N+1)$、速さは $\frac{u}{N+1}$ であるから、その運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}\, mN(N+1)\, \frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\, \frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big).$$

差をとると、

$$\begin{aligned} \text{失われた運動エネルギー} &= \tfrac{1}{2}mu^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $N = 1$（$k = 1$）：質量 m の粒子 1 個が速さ u で質量 m のブロックに当たると、速さ $\frac{1}{2}u$ となり、損失は $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$ で、$\frac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{1}{2}$ と一致する。このとき P_2 も速さ $\frac{1}{2}u$ で動くので、決して到達しない。
- $N = 2$（$k = 3$）：公式から損失は $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\, mu^2$ となる。運動を厳密に 1 段階ずつシミュレーションしたところ（位置と衝突時刻は分数で計算）、同じ値が得られ、衝突はちょうど 2 回で、速さ V_n は公式と一致した。さらに、11 までのすべての N について、衝突が N 回であることと損失の公式も確かめられた。
- 単位：損失は質量と速さの 2 乗の積であり、エネルギーとして正しい形をしている。

よくある間違い

- n 番目の粒子の運動量だけを使い、ブロックがすでに $P_1, \ldots, P_{n-1}$ を含んでいることを忘れる（あるいはブロック自身の質量 km を忘れる）。

- 衝突を $N+1$ 回と数える。P_{N+1} はブロックとちょうど同じ速さなので、決して接触しない。
- 損失に $P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots$ の運動エネルギーを含めてしまう。これらは決して衝突しないので、何も失わない。

STEP のその先へ

このブロックは、物質を掃き集めながら質量が増えていく物体であり、ロケットや、雲の中を落下する雨粒の仲間である。このような可変質量系（variable-mass system）に対しては、ニュートン（Newton）の第 2 法則を「運動量の変化率は力に等しい」という形で系全体に適用する。これはまさに、私たちが衝突ごとに行ったことである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量系とロケットの運動を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。