解答例

STEP II 2012、第 10 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 2012、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

鍵となる考え方

棒は円形断面の弦（chord）であるから、垂直抗力（normal reaction）はすべて中心 O をまっすぐ向き、棒と各半径のなす角 ϕ は幾何学的に $\cos\phi = a/r$ と定まる。棒が動きうるのは O のまわりの回転だけなので、両端は同時に滑る。したがって、各端で摩擦（friction）がどちら向きにはたらくかがわかる。**中点**のまわりのモーメント（moment）をとれば重さが消え、最初の関係式がただちに得られる。次に O のまわりのモーメントと一方向への力の分解によって $\tan\theta$ が求まる。

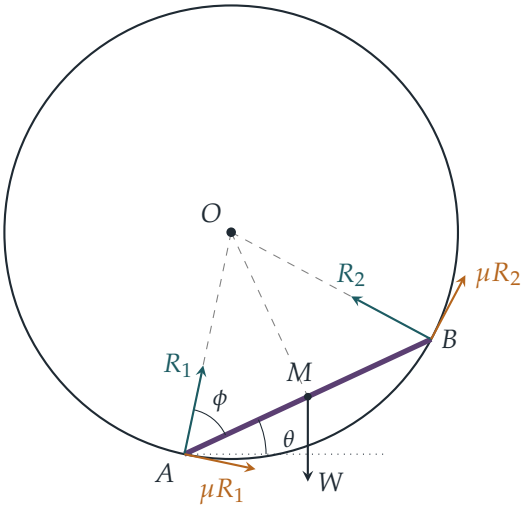
解答

設定

棒を重さ W の一様な剛体（rigid body）の棒とみなし、粗い円柱に接するのは両端 A（低い方）と B（高い方）のみとする。O を円形断面の中心、M を AB の中点とする。$OA = OB = r$ より三角形 OAB は二等辺三角形であるから、OM は AB に垂直であり、

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

ここで $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ である。棒と半径のなす角は**両端とも** ϕ である。



考えてみよう 各端で摩擦はどちら向きにはたらくか？

両端は円周上にとどまり、AB の長さは変わらないので、OM は長さを保ったまま棒に垂直であり続ける。したがって、可能な運動は O のまわりの回転だけである。$\theta \neq 0$ であるから M は O の真下にはなく、重さは O のまわりに棒を水平に近づける向きのモーメントをもつ（図では時計回りであり、A は壁を上り、B は壁を下ることになる）。抗力は O を通るので、これに抵抗できるのは摩擦だけである。両端は同時に動くので、滑り出す直前には両端とも摩擦が限界摩擦（limiting friction）に達している。すなわち、図のように μR_1 と μR_2 が A と B における接線に沿って、どちらも O のまわりの反時計回りの向きにはたらく。

R_1 と R_2 の関係

M のまわりのモーメントをとると、重さが消える。R_1 の作用線は AO であり、これは AM と角 ϕ をなすので、M からの垂直距離は $a\sin\phi$ である。A における摩擦は OA に垂直な接線に沿ってはたらくので、M からの距離は $a\cos\phi$ である。B でも同様である。図において R_1 は M のまわりに棒を時計回りに回し、R_2 と二つの摩擦力はいずれも反時計回りに回すので、

$$R_1\, a\sin\phi = R_2\, a\sin\phi + \mu R_1\, a\cos\phi + \mu R_2\, a\cos\phi.$$

両辺を $a\cos\phi$ で割って整理すると

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

となり、求める式が得られた。特に $R_1 > R_2$ であり、低い方の端のほうが強く押しつけている。

$\tan\theta$ を求める

O のまわりのモーメント。抗力は O を通り、各摩擦力の腕の長さは r である。重さは M にはたらき、OM は棒に垂直なので鉛直方向と角 θ をなす。よって、M の O からの水平距離は $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$ である。したがって

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

棒に垂直な方向への分解（O を含む側を正の向きとする）。各抗力は棒と角 ϕ をなすので、その寄与は $R_i\sin\phi$ である。各摩擦力はこの垂直方向と角 ϕ をなし、A では棒に対して O の側から離れる向き、B ではその側へ向かう向きである。重さの寄与は $-W\cos\theta$ である。よって

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

$S = R_1+R_2$ とおく。最初の結果より $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$ であるから、(2) は

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

となる。一方、(1) は $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$ を意味する。辺々割ると（棒は鉛直ではなく傾いているので $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta\neq 0$ である）

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

分母と分子に r^2 を掛け、$r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$ と $r^2\cos^2\phi = a^2$ を用いると

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

となり、求める式が得られた。

$\lambda<\phi$ を導く

> **考えてみよう** 手もとにあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのか？

符号からである。棒は水平と角 θ をなして傾いており、$\theta\neq 0$ であるから、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $\tan\theta>0$ である。$\mu>0$ より分子 μr^2 は正なので、分母も正でなければならない：

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ と λ はともに $(0,\frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は正かつ増加であるから、$\tan\phi>\tan\lambda$ から $\lambda<\phi$ が得られる。

検算

- 滑らかな場合の極限：$\mu \to 0$ のとき $\tan\theta \to 0$ であるから、滑らかな棒は水平な位置、すなわち M が O の真下にある位置でしか静止できない。正しい。
- 数値：$r = 5, a = 3, \mu = \frac{1}{2}$ とすると $\tan\phi = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$ であり、$\tan\theta = \frac{12.5}{25-11.25} = \frac{10}{11}$ となる。この角度において（さらに無作為に選んだ数千組の r, a, μ においても）二つの力のつり合いの式をベクトル形式で R_1, R_2 について解くと、O のまわりのモーメントは消え、$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$ が 10^{-12} 以内の誤差で成り立つ。
- $\lambda < \phi$ の物理的な意味：λ は摩擦角（angle of friction）である。$\lambda \geq \phi$ ならば摩擦は十分に強く、どの傾きでも棒を支えられるので、棒が滑り出す直前の状態になることはなく、そのような θ は存在しない。

よくある間違い

- 抗力を半径に沿った向きではなく棒に垂直な向きにとってしまう。接触している相手は円柱なので、法線は円柱の法線である。
- 二つの摩擦力を棒に沿って互いに逆向きにとってしまう。両端は O のまわりに同じ回転の向きに動くので、摩擦はどちらの端でも O のまわりに反時計回りである。
- 最初の結果を出すのに、棒に平行な方向と垂直な方向に力を分解してしまう。どちらの式にも W が含まれてしまう。M のまわりのモーメントをとれば、これを避けられる。

STEP のその先へ

$\lambda < \phi$ という結論は、摩擦円錐（friction cone）の考え方そのものである。粗い接触点における全抗力は、法線から角 λ 以内の向きになければならない。ここでは棒が 2 点で接しており、問題は、二つの摩擦円錐が三つの力を 1 点で交わらせる余地を残しているかどうかということである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体の静力学（statics）をより詳しく扱っており、起ころうとしている運動の向きを自分で見きわめなければならない問題も含んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。