解答例

STEP II 2012、第 1 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

> **STEP II 2012、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q1

鍵となる考え方

各因数 $(1-x^k)^{-1}$ は x^k についての等比級数（geometric series）であるから、こうした因数を掛け合わせて x^n の係数（coefficient）を読み取ることは、n を許された部品の和として表す方法の数を**数え上げる**ことにほかならない。係数を個数として捉えれば場合分けはおのずと整理され、$(1-x)^{-1}$ を掛けることは、係数の列をその累積和（running totals）の列に変えるだけの操作になる。

解答

一般項

二項展開（binomial expansion）により、$|y|<1$ のとき $(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$ である（係数は $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$）。$y=x^6$ とおくと

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

となるので、一般項は $(r+1)x^{6r}$ であり、6 の倍数でない x の累乗の係数はすべて 0 である。

小問 (i)

また $(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$ である。二つの級数を掛け合わせると、項 x^n は $6r+3s=n$ を満たす非負整数の組 (r,s) のそれぞれから生じ、$(r+1)\cdot 1$ だけ寄与する。したがっ

て

$$\text{次の項の係数：} x^n = \sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}} (r+1).$$

$n = 24$ のときは $2r + s = 8$ が必要なので、r は $0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかであり（それぞれに対して $s = 8 - 2r \geq 0$ がちょうど一つ定まる）、x^{24} の係数は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

である。

一般の n の場合。 $6r + 3s$ はつねに 3 の倍数であるから、$3 \mid n$ でない限り係数は 0 である。$n = 3m$ のときは $2r + s = m$ が必要であり、$0 \leq 2r \leq m$ を満たす各 r に対して条件を満たす s がちょうど一つ存在する。よって r は 0 から $\lfloor m/2 \rfloor$ までを動き、係数は

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

となる。n を 6 で割った余りで分類すると、次のようになる。

- $n = 6k$（このとき $m = 2k$、$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係数は $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$。
- $n = 6k + 3$（このとき $m = 2k + 1$、$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係数はやはり $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$。
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$：係数は 0。

確認として、$n = 24 = 6 \times 4$ のとき $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ となり、上で求めた値と一致する。

小問 (ii)

小問 (i) で求めた x^n の係数を b_n、いま求めたい係数を c_n と書く。$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ であるから

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

となり、$c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$、すなわち小問 (i) の係数の累積和である。

考えてみよう $(1 - x)^{-1}$ を掛けると累積和が得られるのはなぜか。

積の中で x^n を得るには、第一の級数から x^j を、$1 + x + x^2 + \cdots$ から x^{n-j} を取ればよく、後者の係数はつねに 1 である。したがって $0 \leq j \leq n$ を満たすすべての b_j が、重み 1 でちょうど一回ずつ c_n に現れる。

0 でないのは $3 \mid j$ を満たす b_j だけであり、小問 (i) よりそれらは等しい二つ組で現れる。すなわち $b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$ である。ここで $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$ は第 p 三角数

（triangular number）である。よって $n = 24$ のとき

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

$n = 25$ のときは、$3 \nmid 25$ より追加される項 b_{25} は 0 なので、$c_{25} = c_{24} = 55$ である。

$n = 66 = 6 \times 11$ のときは、同じパターンにより

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

となる。最初の p 個の三角数の和は四面体数（tetrahedral number）$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$ である（数学的帰納法（induction）によって示せるし、ホッケースティック恒等式（hockey-stick identity）により $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$ となることからもわかる）。よって $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$ であり、$T_{12} = 78$ である。ゆえに

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

同じ議論から一般の公式が得られる。$n = 6K + r$ とおくと、$0 \le r \le 2$ のとき $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$、$3 \le r \le 5$ のとき $c_n = 2\binom{K+3}{3}$ である。$K = 4$ のとき前者は $40 + 15 = 55$ を与え、$K = 11$ のときは $572 + 78 = 650$ を与える。

検算

小問 (ii) における x^n の係数は、$6a + 6b + 3c + d = n$ の非負整数解の個数を数えている（各因数に一つずつ等比級数が対応し、$(1 - x^6)^{-2}$ は二つと数える）。これらの解をコンピュータで直接数えると、$n = 24, 25, 66$ に対して 55、55、650 が得られる。また、級数を x^{80} まで項ごとに掛け合わせても、両方の小問の公式が確かめられる。手計算でも小さな場合はすぐに確認できる。小問 (ii) では $c_0 = c_1 = c_2 = 1$、$c_3 = c_4 = c_5 = 2$ であり、$K = 0$ とした一般の公式と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で $n = 6k + 3$ の場合を忘れること。3 の奇数倍も、x^3 の因数を奇数個取ることで現れる。
- $(1 - x^6)^{-2}$ の一般項を $(r+1)x^{6r}$ ではなく $r\,x^{6r}$ と書いてしまうこと。定数項は 0 ではなく 1 である。
- x^{25} を新たに計算し直すこと。小問 (i) の級数には指数が 25 の項がないので、その係数は x^{24} の係数に等しい。

STEP のその先へ

このように数え上げの道具として用いられる冪級数（power series）は**母関数**（generating functions）と呼ばれる。ここでの積は、価値が 6、6（デザインの異なるもの）、3、1 の硬貨を使って n ペンスを支払う方法の数を数えている。分割（partitions）の理論はまさにこの考え方から発展したものであり、答えが n を 6 で割った余りに応じた区分的な多項式になるという事実は、一般的な現象である（「準多項式」（quasi-polynomials））。この手法への生き生きとした入門としては、Wilf の *generatingfunctionology* を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。