解答例

STEP I 2012、第 9 問

力学 ・ 放物運動

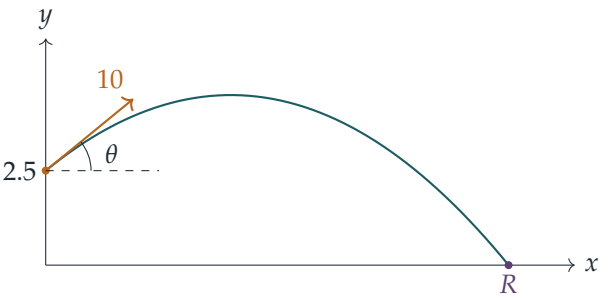
> **STEP I 2012、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q9

鍵となる考え方

これはある高さから打ち出される放物運動（projectile）であるから、飛行時間（time of flight）は t についての二次方程式（quadratic）から得られる。この問題の本質は、その解を $c = \cos 2\theta$ を用いて書き直すことにある。倍角公式（double-angle formulae）$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$ と $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ がすべての仕事をしてくれる。到達距離（range）がただ一つの変数 c の関数として表されれば、その最大化は通常の微分法の問題であり、2 乗する操作に少し注意を払えばよい。

解答

砲丸を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点としてモデル化する。投射点の真下の地面を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。また $0 \le \theta < 90°$（砲丸は前方かつ上方へ投げられる）と仮定する。したがって $\sin\theta \ge 0$ かつ $\cos\theta > 0$ である。



飛行時間

水平方向の速度は $10\cos\theta$ のまま一定であり、鉛直方向の運動は初速度 $10\sin\theta$、加速度 -10 である。よって時刻 t において

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

砲丸が着地するのは $y = 0$ のとき、すなわち

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

のときである。2 つの解の積は $-\frac{1}{2} < 0$ であるから、正の解はちょうど 1 つであり、それは正の符号をとったものである：

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

ここで $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1-c)$ を用いる。$\sin\theta \geq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$ と書くことができ、また $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2-c)$ である。したがって

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

となり、これが求める時間（秒）である。

到達距離

同様に $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ であり、$\cos\theta > 0$ であるから $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$ である。到達距離は

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right) \text{ m}. \end{aligned}$$

である。θ が $[0°, 90°)$ を動くとき、$c = \cos 2\theta$ は $(-1, 1]$ を動くので、この区間で R を最大化すればよい。

到達距離の最大化

$-1 < c < 1$ において微分すると

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

停留点（stationary point）であるためには

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

が必要である。

考えてみよう $(*)$ をそのまま 2 乗してよいだろうか。何がまずくなりうるだろうか。

2 乗すると符号の情報が失われるため、偽の解（extraneous roots）が紛れ込むことがある。両辺の分母はともに正であるから、$(*)$ において c と $1-2c$ は同符号でなければならない（両方とも 0 になることはありえない）。これより $0 < c < \frac{1}{2}$ が導かれるので、このことを念頭に置いておく。2 乗して分母を払うと

$$\begin{aligned} 4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2) \\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4 \\ 5c^2+4c-1 &= 0 \\ (5c-1)(c+1) &= 0. \end{aligned}$$

解 $c=-1$ は $0<c<\frac{1}{2}$ の範囲外である（これは鉛直に投げ上げる場合に当たる）。よって停留点は $c=\frac{1}{5}$ のみである。これは実際に $(*)$ を満たす。$\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$、$\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$ であるから、両辺はともに $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ に等しい。

この点において

$$R\left(\tfrac{1}{5}\right)=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

これが最大値であることを確かめるため、区間の端点での値と比較する。$c\to -1$ のとき $R\to 0$ であり、$R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$ である。R は $[-1,1]$ で連続かつ内部で微分可能であるから、その最大値は端点または停留点でとられる。そしてただ一つの停留点がこれらの値のうち最大のものを与える。よって、求めるとおり、到達距離は $c=\frac{1}{5}$ のとき最大となる。（これは $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$ であり、45° より少し小さい。）

距離の増分

45° では $c=\cos 90^\circ=0$ であるから

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

したがって距離の増分は

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- $\theta = 0$（$c = 1$）のとき時間は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、高さ 2.5 m の段から転がり落ちる球についての $2.5 = 5t^2$ と一致する。
- $c \to -1$（鉛直投げ上げ）のとき、到達距離は当然 0 に近づく。
- 数値的には、距離の増分は $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176$ m であり、わずか約 18 cm にすぎない。最適点の近くは非常に平坦なのである。飛行の逐次シミュレーションと、$R(c)$ の細かいグリッド探索のいずれも公式と一致し、最大値を $c = 0.2$ に与える。

よくある間違い

- 解の公式で負の符号をとってしまい、負の時間を得る。
- $(*)$ を 2 乗したあと $c = -1$ を確認せずに残してしまう。あるいは $c = \frac{1}{5}$ が最小ではなく最大であることの正当化を忘れる。
- 最適な角度は 45° だと思い込む。それが正しいのは投射点と着地点が同じ高さにある場合だけである。

STEP のその先へ

ある高さから打ち出すと、最適な角度は必ず 45° より小さくなる。一般に最適な角度は $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$ を満たし、ここではこれが $\tan\theta = \sqrt{2/3}$ を与える。これは $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$ と同じことである。パラメータの関数を最適化し、その最大値の付近がいかに平坦であるかに気づくことは、感度分析（sensitivity analysis）の最初の一歩である。最大点の近くでは、パラメータの小さな誤差は 2 次の損失しかもたらさない。空気抵抗がある場合とない場合の放物運動についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。