解答例

STEP I 2012、第 8 問

純粋数学 ・ 同次形微分方程式

> **STEP I 2012、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も**同次**（homogeneous）である。すなわち、全体にかかる x のべきを除けば、どの項も x と y について同じ全次数をもつ。$y = xv$ とおくと、その x のべきが約されて、方程式は v の部分と x の部分に分離される。小問 (i) ではこの手順が誘導されている。小問 (ii) では自分で行う必要がある。x で両辺を割ると同じ種類の方程式であることがわかり、そのあとの v についての積分には部分分数分解（partial fractions）が必要になる。

解答

小問 (i)

$y = xv$ ならば、積の微分法（product rule）により $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ である。これを代入すると、

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

$x \neq 0$ であるから x^2 で割ることができ、

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

を得る。これが示すべき式である。

次に変数分離（separation of variables）を行う。方程式は $xv\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$ を意味する。$v^2 \neq 1$ ならば、

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

-2 を掛けて指数をとると、ある定数 $A > 0$ に対して $|1 - v^2| = Ax^{-4}$ となるので、

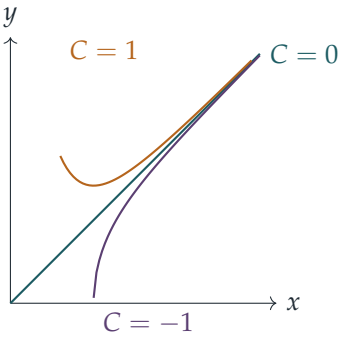
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

ただし $C = \pm A$ は 0 でない定数である。除外しておいた場合 $v = \pm 1$（すなわち $y = \pm x$）も解である。このとき $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ かつ $2v^2 - 2 = 0$ となるからである。これらはちょうど $C = 0$ の場合にあたるので、C は任意の定数としてよい。

最後に $v = y/x$ を代入すると、

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

となり、これが求める形である。



図は第 1 象限におけるいくつかの解曲線を示している。$y^2 = x^2 + C/x^2$ からわかるとおり、これらは $x \to \infty$ のとき直線 $y = x$ に近づく。

小問 (ii)

$6x + 5y$ のどの項も次数は 1 であり、$y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ も同様である。そこで同じ置換 $y = xv$ を試みる：

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

$x \neq 0$ で割って項を整理すると、

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v + 2)(v + 3).$$

考えてみよう $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$ はどのように積分すればよいか？

部分分数分解を用いる。$v = P(v + 3) + Q(v + 2)$ とおく。$v = -2$ とすると $P = -2$、$v = -3$ とすると $Q = 3$ を得る。よって

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

$v \neq -2, -3$ ならば、変数分離により

$$\int \left(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2} \right) \mathrm{d}v = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

したがって $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$ は定数である。絶対値記号を外すと（$v \neq -3$ である解曲線上では $x(v+3)^3$ の符号は変わりえない）、

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

ここで $v = y/x$ を代入する。分子は $x(y+3x)^3/x^3$、分母は $(y+2x)^2/x^2$ となるので、x のべきは完全に約される：

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

ただし K は定数である。

除外した直線も解である。$y = -3x$ ならば $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$、$6x + 5y = -9x$ となるので、方程式は成り立つ。この直線は枠で囲んだ式の $K = 0$ の場合にあたる。$y = -2x$ ならば $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$、$6x + 5y = -4x$ となるので、この直線も解である。これはどの有限の K にも含まれず、$K \to \infty$ に対応する。解を $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$ と書けば、代わりにこちらが $k = 0$ として含まれる。

検算

- 小問 (i)：$x^2y^2 - x^4 = C$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$ となる。$2x$ で割るともとの方程式に戻る。
- 小問 (ii)：多数のランダムな初期点から、方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解き進めた。どの解に沿っても、量 $(y+3x)^3/(y+2x)^2$ は約 10^{-14} の精度で一定であった。たとえば点 $(1,1)$ を通る曲線では $K = 64/9$ である。
- 各方程式の解となる原点を通る直線 $y = \pm x$ および $y = -2x, -3x$ は、$2v^2 - 2 = 0$ と $v^2 + 5v + 6 = 0$ の根から得られる。これは v についての方程式が正しいことのよい兆候である。

よくある間違い

- 積の微分法を忘れること：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ であって、$x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ ではない。
- 部分分数分解を誤ること（たとえば $2/(v+2) - 3/(v+3)$ としてしまう）。$v = 0$ などの値で分解を確かめるとよい。

- $1-v^2$ や $(v+2)(v+3)$ で割る際に、それによって直線解の一部が失われることに言及しないこと。

STEP のその先へ

方程式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ は同次であるという。その解曲線どうしは拡大 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ によって互いに移り合い、これが $v = y/x$ がうまくいく理由である。これは、ソフス・リー（Sophus Lie）による深い考え方、すなわち微分方程式（differential equation）の対称性（symmetry）を用いてその階数（order）を下げることができるという考え方の、最も単純な場合である。直線解 $y = mx$ は、この拡大で動かない曲線である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、同次方程式やその他の 1 階の方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。