解答例

STEP I 2012、第 7 問

純粋数学 • 周期的な漸化式

> **STEP I 2012、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q7

鍵となる考え方

周期（period）1、2 または 3 で繰り返す数列は最初の数項で完全に決まるので、漸化式（recurrence）は一周期の中にある少数の連続する 3 項の組（および周期の折り返し部分）について成り立てばよい。これらを書き出すと、x, y, z についての小さな連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られる。この方程式には全部が 0 ではない解があり、そのことが p と q に対する条件を強いるのである。全体を通して、約分（両辺を割ること）を可能にしているのは $x \neq 0$ という事実である。

解答

小問 (i)

すべての n について $t_n = x$ ならば、漸化式より $x = px + qx$、すなわち $(p+q-1)x = 0$ である。$x \neq 0$ であるから、$p+q=1$ を得る。

逆に、$p+q=1$ かつ $t_0 = t_1 = x$ ならば $t_2 = (p+q)x = x$ であり、数学的帰納法（induction）によりすべての項は x に等しい。x を制限するものは何もないので、x は 0 でない任意の実数でよい。

小問 (ii)

パターン $x, y, x, y, \ldots$ が漸化式を満たすのは、連続する 2 つの 3 項の組 (x, y, x) と (y, x, y) が漸化式を満たすとき、かつそのときに限る：

$$x = py + qx, \qquad \text{すなわち} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$
$$y = px + qy, \qquad \text{すなわち} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

(1) と (2) の和と差をとると

$$(1-q-p)(x+y) = 0, \qquad (1-q+p)(x-y) = 0.$$

を得る。$x+y$ と $x-y$ がともに 0 になることはない。そうなると $x = 0$ となってしまうからである。$x+y \neq 0$ ならば $p+q = 1$ であり、$x-y \neq 0$ ならば $q-p = 1$ である。よって、$q+p = 1$ と $q-p = 1$ の少なくとも一方が成り立ち、題意が示された。

次に、x と y の関係を導く。

- $q+p = 1$ ならば $1-q = p$ であり、(1) は $px = py$ となる。よって $p \neq 0$ であれば $x = y$ である。
- $q-p = 1$ ならば $1-q = -p$ であり、(1) は $-px = py$ となる。よって、やはり $p \neq 0$ であれば $x = -y$ である。

唯一の例外は $p = 0$ の場合であり、このときどちらの場合も $q = 1$ となる。$p = 0$ かつ $q = 1$ のとき漸化式は $t_{n+2} = t_n$ であり、どんなパターン $x, y, x, y, \ldots$ もこれを満たすので、x と y の間には何の関係もない。したがって、$p = 0$ かつ $q = 1$ の場合を除いて、$x = y$ または $x = -y$ である。

小問 (iii)

今度のパターンは $x, y, z, x, y, z, \ldots$ であり、連続する 3 つの 3 項の組 (x, y, z)、(y, z, x)、(z, x, y) が必要である：

$$z = py + qx, \tag{3}$$
$$x = pz + qy, \tag{4}$$
$$y = px + qz. \tag{5}$$

(3) を用いて、残りの 2 式から z を消去する：

$$(4): \quad x = p(py + qx) + qy \quad \Longrightarrow \quad (pq-1)x + (p^2+q)y = 0,$$
$$(5): \quad y = px + q(py + qx) \quad \Longrightarrow \quad (p+q^2)x + (pq-1)y = 0.$$

第 1 式に $pq-1$ を、第 2 式に p^2+q を掛けて引く。y の項が消えて

$$\left[(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)\right]x=0.$$

が残る。

考えてみよう なぜこの括弧の中身は 0 でなければならないのか。方程式にそもそも解がないということはありえないのか。

解は存在する。数列が存在するのだから、x と y は両方の式を満たしている。そして $x\neq 0$ であるから、x で割ることができる。括弧の中身を展開すると

$$\begin{aligned}(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)&=p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\&=1-3pq-p^3-q^3,\end{aligned}$$

となるので、$p^3+q^3+3pq-1=0$ であり、題意が示された。

因数分解（factorisation）。この式は $a=p$、$b=q$、$c=-1$ とした $a^3+b^3+c^3-3abc$ であり、よく知られた恒等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

により

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

となる。（この恒等式を覚えていなければ、展開して確かめればよい。角括弧の中身は $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$ であり、これに $p+q-1$ を掛けると元の 3 次式に戻る。）積が 0 であるから、$p+q=1$ または $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$ である。

$(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$ の場合。実数の平方の和が 0 となるのは各平方がすべて 0 のときに限るので、$p=q=-1$ である。このとき (3) は $z=-y-x$、すなわち $x+y+z=0$ となる。

$p+q=1$ の場合。(3)、(4)、(5) に $q=1-p$ を代入し、それぞれを差の形に整理すると

$$z-x=p(y-x),\qquad x-y=p(z-y),\qquad y-z=p(x-z).$$

となる。$a=y-x$、$b=z-y$、$c=x-z$ とおくと、$a+b+c=0$ である。第 1 式と第 3 式から $c=-pa$ および $b=-pc=p^2a$ が得られる。すると

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

考えてみよう $1-p+p^2$ が 0 になることはありうるか。

ありえない。すべての実数 p について $1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ である。よって $a=0$ であり、ここから $c=-pa=0$、さらに $b=0$ が得られる。すなわち $x=y=z$ である。

$p=q=-1$ のとき $p+q=-2\neq 1$ であるから、2 つの場合が重なることはない。よって、$x=y=z$（$p+q=1$ のとき）または $x+y+z=0$（$p=q=-1$ のとき）のいずれかである。どちらも実際に起こる。第 2 の場合、漸化式 $t_{n+2}=-t_{n+1}-t_n$ は任意の初期値に対して $x,\ y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots$ を与える。

検算

- $p=q=-1$、$t_0=2$、$t_1=5$ とすると、数列は $2,5,-7,2,5,-7,\ldots$ となり、$2+5-7=0$ である。
- $p=3$、$q=4$（したがって $q-p=1$）とし、$1,-1$ から始めると $t_2=-3+4=1$、$t_3=3-4=-1$ となり、小問 (ii) の予測どおり交互に並ぶ。
- $p=2$、$q=-1$ のとき 3 次式は $8-1-6-1=0$ となり、$p+q=1$ と整合する。また、展開と因数分解、および 3 次式が (3)–(5) の 3×3 行列式（determinant）と一致することを、無作為に選んだ 1000 組の (p,q) で確認した。漸化式のシミュレーションにより、上記のすべての場合が確かめられた。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $p+q=1$ **かつ** $q-p=1$ と結論してしまうこと。この議論が示すのは少なくとも一方が成り立つことだけであり、両方が成り立つのは例外的な場合 $p=0$、$q=1$ に限られる。
- 小問 (ii) で、$p=0$ こそが問題の問うている例外であることに気づかずに p で割ってしまうこと。
- 折り返しの式 (4) と (5) を忘れること。一周期につき 1 つの式だけでは、条件を導くのに足りない。

STEP のその先へ

$t_{n+2} = pt_{n+1} + qt_n$ を扱う標準的な方法は、**特性方程式**（characteristic equation）$\lambda^2 = p\lambda + q$ を用いるものである。一般に $t_n = A\alpha^n + B\beta^n$ であり、ここで α と β はその根である。数列が k 項ごとに繰り返すのは、その数列に現れる根が $\lambda^k = 1$ を満たすとき、かつそのときに限る。定数列には根 1 が必要であり（よって $p + q = 1$）、交互に並ぶ数列には -1 が必要である（よって $q - p = 1$）。$p = q = -1$ の場合は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ となり、その根は 1 の虚数の 3 乗根（cube roots of unity）である。だからこそ、それらの和 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ が $x + y + z = 0$ として再び現れるのである。これは姿を変えた線形代数（linear algebra）（数列に作用するシフト写像（shift map））であり、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、まさにこのように固有値（eigenvalues）を通して漸化式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。