解答例

STEP I 2012、第 6 問

純粋数学 ・ 三角不等式（三角関数）

> **STEP I 2012、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q6

鍵となる考え方

ここで現れる仰角（angle of elevation）はどれも対辺が共通で、それは旗竿である。したがって、それぞれの余接（cotangent）は水平距離を高さで割ったものにすぎない。すると最初の結果は円の中の長さに関する事実 $DC^2 = AD \cdot DB$ に帰着する。これは半円の弧に対する円周角が直角であることによる。三角関数の恒等式（identity）によって、$\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$ は符号を直接読み取れる形に変わる。その不等式（inequality）が得られれば、幾何的な考察から最後の結果はほとんど労せずに得られる。

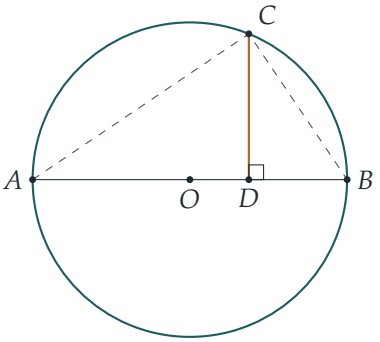
解答

幾何的な結果

旗竿の高さを $h > 0$、先端を T とし、DT は鉛直であるとする。A, B, C はいずれも地面上にあるので、三角形 TDA, TDB, TDC はいずれも D で直角をなす。よって

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

α と β は鋭角であるから、D は A とも B とも一致しない（そのどちらの点から見ても仰角は直角になってしまう）。したがって D は A と B の間に真にあり、$DC > 0$ である。



次に地面を真上から見た図を考える。O を中心、r を半径とし、$x = OD$ とする（B の向きを正として測るので $-r < x < r$ である）。すると $AD = r + x, DB = r - x$ であり、三角形 ODC に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$ である。したがって

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

（同じことであるが、$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角なので直角であり、CD は直角三角形 ACB の垂線（altitude）である。）両辺を h^2 で割ると

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

となり、示すべき式が得られる。

恒等式

$s = \frac{1}{2}(p + q)$ とおき、2 倍角の公式（double-angle formulae）から得られる形 $\sin^2 s = \frac{1}{2}(1 - \cos(p + q))$ および $\cos^2 s = \frac{1}{2}(1 + \cos(p + q))$ を用いる。左辺は

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q(1 - \cos(p + q)) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q(1 + \cos(p + q)) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\cos p \cos q - \sin p \sin q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos(p + q)$ と $\cos(p - q)$ の加法定理（compound-angle formulae）を用いた。これはすべての p, q について成り立つ。

不等式

恒等式の右辺を因数分解すると

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(1 - \cos(p - q)).$$

ここで $p,q > 0$ かつ $p+q \le \frac{1}{2}\pi$ と仮定する。すると $0 < p+q \le \frac{1}{2}\pi$ なので $\cos(p+q) \ge 0$ であり、また $1-\cos(p-q) \ge 0$ は常に成り立つ。よって右辺は 0 以上であり、

$$\cos p \cos q \sin^2 s \ \ge\ \sin p \sin q \cos^2 s.$$

考えてみよう 両辺を $\sin p \sin q \sin^2 s$ で割ってもよいだろうか？

よい。p と q は正で和が $\frac{1}{2}\pi$ 以下であるから、p, q, s はいずれも $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、$\sin p$, $\sin q$, $\sin s$ はすべて真に正である。正の量 $\sin p \sin q \sin^2 s$ で割っても不等号の向きは変わらないので、

$$\cot p \cot q \ \ge\ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

等号が成り立つのは $p = q$ または $p+q = \frac{1}{2}\pi$ のとき、かつそのときに限る。

最後の結果

$p = \alpha, q = \beta$ とする。どちらも正であり（正の高さをもつ旗竿の仰角であるから）、$\alpha + \beta \le \frac{1}{2}\pi$ なので、上の不等式が適用できる。最初の結果と合わせると

$$\cot^2 \phi = \cot\alpha \cot\beta \ \ge\ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ と $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ はどちらも $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属する（ϕ については $DC > 0$ かつ $h > 0$ による）ので、どちらの余接も正であり、平方根をとってよい：$\cot\phi \ge \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

考えてみよう なぜこれから $\phi \le \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ が得られ、$\ge$ ではないのだろうか？

cot は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で狭義単調減少だからである。つまり、余接が大きいほど角は小さい。よって

$$\phi \le \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{ただし} \alpha+\beta \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

検算

- $D = O$ ならば $AD = DB = DC = r$ なので $\alpha = \beta = \phi$ である。このとき最初の結果の両辺は等しく、最後の不等式は等号となり、$p = q$ の場合と一致する。
- 数値による確認：$r = 1, OD = \frac{1}{2}, h = 1$ とすると $\cot\alpha = 1.5, \cot\beta = 0.5, \cot^2\phi = 0.75$ となり、予想どおりである。この場合 $\alpha+\beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$ なので最後の結果は成り立つとは限らない。実際 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$ であり、条件が本質的であることがわかる。
- 恒等式を 10^5 組のランダムな (p,q) で、不等式を許される範囲内の 2×10^5 組のラ

ンダムな組で、そして $\phi \le \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ を $\alpha+\beta \le \frac{1}{2}\pi$ を満たす約 8×10^4 通りのランダムな配置で確かめたが、成り立たない例はなかった。

よくある間違い

- cot が減少関数であることを忘れて、$\phi \ge \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ と結論してしまう。
- $\sin p \sin q \sin^2 s$ が正である理由を述べずに、不等式をそれで割ってしまう。
- 条件 $p+q \le \frac{1}{2}\pi$ を無視してしまう。この条件こそが $\cos(p+q) \ge 0$ を保証するものであり、これがなければ不等式は成り立たないことがある。

STEP のその先へ

この不等式は、$\ln\cot t$ が $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 上の凸関数（convex function）であることを述べている。実際、$\ln\cot p$ と $\ln\cot q$ の平均が、平均に対する $\ln\cot$ の値以上であるということを主張しているからである。凸性とイェンセンの不等式（Jensen's inequality）は、大学 1 年次の解析学において不等式を生み出す強力な源である。関係式 $DC^2 = AD\cdot DB$ は、ユークリッド（Euclid）による相乗平均（geometric mean）の作図である：$\cot\phi$ は $\cot\alpha$ と $\cot\beta$ の相乗平均なのである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は凸関数を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。