解答例

STEP I 2012、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2012、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/12-s1-q5

鍵となる考え方

最初の二つの積分は、いずれも標準的な手法で処理できる。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ と書けば、$\sin x$ が $\cos x$ の導関数（derivative）の（符号を変えた）ものであることがわかるので、置換（substitution）$u = \cos x$ がうまくいく。二つ目の積分では対数が扱いにくい因子なので、部分積分（integration by parts）によってこれを微分して消す。最後の積分では、$\cos x + \sin x$ が姿を変えた余弦 $\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ であることに注目する。変数を $\frac{1}{4}\pi$ だけずらすと、積分区間は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ になり、被積分関数（integrand）は先に求めた二つの積分の組合せになる。

解答

一つ目の積分

一つ目の積分を I_1 とおく。$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ であるから、$u = \cos x$ と置換すると $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$ である。$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\, \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u \ln u \,\mathrm{d}u,$$

ここで、$\mathrm{d}u$ から生じる負号を用いて積分の上端と下端を入れ替えた。部分積分（$\ln u$ を微分し、$2u$ を積分する）により

$$\int 2u \ln u \,\mathrm{d}u = u^2 \ln u - \int u^2 \cdot \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u = u^2 \ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

$u = 1$ のとき、これは $-\frac{1}{2}$ である。$u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $u^2 = \frac{1}{2}$、$\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$ であるから、値は $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$ となる。したがって

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

となり、求める結果が得られた。

二つ目の積分

二つ目の積分を I_2 とおく。$\ln(\cos x)$ を微分し、$\cos 2x$ を積分する形で部分積分を行う。$\cos 2x$ の原始関数（antiderivative）としては $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$ をとるのが便利であり、$\ln(\cos x)$ の導関数は $-\sin x / \cos x$ である。よって

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ単に $\frac{1}{2}\sin 2x$ と書くのではなく、$\sin x \cos x$ を選ぶのだろうか？

両者は同じ関数であるが、$\sin x \cos x$ の形にしておくと、因子 $\cos x$ が $\ln(\cos x)$ の導関数の分母にある $\cos x$ と約分され、$\sin^2 x$ という易しい積分が残る。

境界項は $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$ である。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

よって

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\left(\pi - 2\ln 2 - 2\right) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

となり、求める結果が得られた。

最後の積分

最後の積分を I とおく。加法定理（compound-angle formula）により

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

このことから置換 $t = x - \frac{1}{4}\pi$ が思い浮かぶ。この置換により、積分区間 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は I_1 と I_2 の積分区間である $[0, \frac{1}{4}\pi]$ に移る。$2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$ であるから

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

であり、また

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

である。これは $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で $\cos t > 0$ であるから成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

残りの積分は o になる：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

よって、上の二つの結果を用いると

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によると $I_1 \approx -0.076713$、$I_2 \approx -0.030588$、$I \approx 0.046125$ であり、これらは $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$、$\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$、$\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$ と小数第 10 位まで一致する。一つ目の積分の符号も手早く確かめておこう。$(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上では $\sin 2x > 0$ かつ $\ln(\cos x) < 0$ であるから、I_1 は負でなければならない。実際、$\ln 2 - 1 < 0$ である。

よくある間違い

- I_2 の部分積分で境界項を忘れる。境界項は $x = \frac{1}{4}\pi$ において o ではない。
- $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ と $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$ の符号を取り違え、$I_2 - I_1$ ではなく $I_1 - I_2$ や $I_1 + I_2$ を得てしまう。
- $\ln\sqrt{2}$ から生じる定数 $\frac{1}{2}\ln 2$ を、その係数の積分が o になることを確かめずに落としてしまう。

STEP のその先へ

$\ln(\cos x)$ や $\ln(\sin x)$ の積分は古典的な題材である。同じ対称性の工夫を使うと、有名な結果 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ が得られ、一般の区間で考えるとクラウゼン関数

（Clausen function）やカタランの定数（Catalan's constant）につながる。大学 1 年次の解析学の講義では、対数が区間の端点で発散する場合にこのような積分がきちんと定義されることも確かめる。このとき、これらは広義積分（improper integral）となる。この種の問題をさらに練習したければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。