解答例

STEP I 2012、第 4 問

純粋数学 • 接線と法線

> **STEP I 2012、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q4

鍵となる考え方

すべては $y = \frac{1}{2x}$ の傾き（gradient）と、注意深い消去（elimination）から導かれる。p と q を入れ替えただけの違いしかない 2 直線の交点を求めるとき、方程式どうしを引き算すると必ず因数（factor）$p - q$ が現れる。2 点は異なるので、この因数は約分してよい。特別な場合には、条件が Q に何をもたらすかに注目するとよい。この条件により Q は直線 $y = x$ に関する P の鏡像（mirror image）となり、この対称性によって T と N がその直線上にくる理由が説明できる。

解答

点 T

C 上では $y = \dfrac{1}{2x}$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$ である。したがって P における接線（tangent）の傾きは $-\frac{1}{2p^2}$ であり、その方程式は

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

両辺に $2p^2$ を掛けると $2p^2y - p = -x + p$、すなわち

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

同様に、Q における接線は

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

(1) から (2) を引くと、

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

2 点は異なるので $p \neq q$ であり、$2(p-q)$ で割って $(p+q)y = 1$ を得る。$p, q > 0$ より $p+q \neq 0$ であるから、

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

これを (1) に代入すると、

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

よって T は点 $\left(\dfrac{2pq}{p+q}, \dfrac{1}{p+q}\right)$ であり、題意が示された。

$pq = \frac{1}{2}$ のときの点 N

P における法線（normal）は接線に垂直であるから、その傾きは $2p^2$ であり、方程式は

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

同様に、Q における法線は $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$ である。y の 2 つの式を等しいとおくと、

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

$2(p-q) \neq 0$ で割ると、

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

これは任意の異なる p と q に対して成り立つ。ここで $pq = \frac{1}{2}$ を用いると $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$ となり、右辺は次のようになる。

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

したがって $x = p + q$ である。これを (3) に代入すると、

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

ここで $2pq = 1$ を 2 回用いた。すなわち $2p^2 q = p(2pq) = p$ および $\frac{1}{2p} = q$ である。したがって

$$N = (p+q,\ p+q).$$

（$p \neq q$ と $pq = \frac{1}{2}$ を合わせると $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となることに注意する。これが p に対する唯一の制約である。）

考えてみよう そもそもなぜ T と N は $y = x$ 上にあるのだろうか？

$pq = \frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{2q} = p$、$\frac{1}{2p} = q$ であるから、$P = (p, q)$、$Q = (q, p)$ となる。曲線 $xy = \frac{1}{2}$ は $y = x$ に関する鏡映（reflection）について対称であり、この鏡映は P と Q を入れ替える。したがってこの鏡映は 2 本の接線を入れ替え、2 本の法線も入れ替えるので、それぞれの交点は自分自身に移される。そして、この鏡映で動かない点は $y = x$ 上にある。計算もこのことを裏づけている。

$y = x$ 上の T と N、および距離の積

$2pq = 1$ のとき、T についての結果から

$$T = \left(\frac{1}{p+q}, \frac{1}{p+q} \right),$$

となり、これは $y = x$ 上にある。また $N = (p+q,\, p+q)$ であったから、これも $y = x$ 上にある。

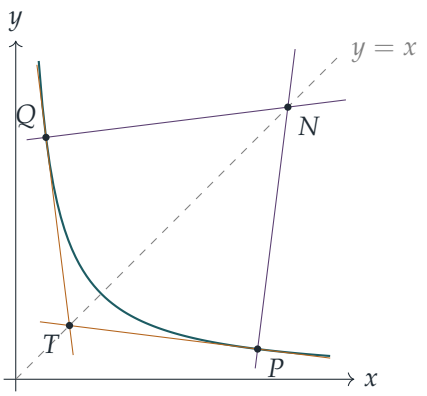
$a > 0$ のとき、点 (a, a) と原点との距離は $\sqrt{2}\,a$ である。$p + q > 0$ であるから、

$$OT = \frac{\sqrt{2}}{p+q}, \qquad ON = \sqrt{2}\,(p+q),$$

よって

$$OT \cdot ON = 2,$$

となり、これは（p によらない）定数である。以上で題意が示された。



図は $p = 2$、$q = \frac{1}{4}$ の場合を示している。接線は琥珀色、法線は紫色で描いてある。

検算

$p = 2$、$q = \frac{1}{4}$ とすると $pq = \frac{1}{2}$ である。接線は $x + 8y = 4$ と $8x + y = 4$ であり、その交点は $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$ で、$\frac{1}{p+q} = \frac{4}{9}$ と一致する。法線は $y = 8x - \frac{63}{4}$ と $y = \frac{x}{8} + \frac{63}{32}$ であり、そ

の交点は $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$ で、$p+q=\frac{9}{4}$ と一致する。さらに $OT \cdot ON = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2$ となる。また、p と q を無作為に 2000 通り選び、厳密な有理数演算によって、T の一般式と、特別な場合の 2 つの結果をすべて確認した。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $p-q$ で割ってしまう。まさにここで「異なる 2 点」という条件が使われるのである。
- N を求める際に、$\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$ で符号を誤る。
- $pq=\frac{1}{2}$ を用いて T を簡単にしないまま、それが $y=x$ 上にあると主張してしまう。

STEP のその先へ

直角双曲線（rectangular hyperbola）$xy=c^2$ は円錐曲線（conic）の一つであり、$OT \cdot ON$ が一定であるという事実は、T と N が円 $x^2+y^2=2$ に関して**互いに反転の関係にある点**（inverse points）であることを意味している。円に関する反転（inversion）は、幾何学においても複素解析（complex analysis）においても強力な変換であり、複素解析では写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ として現れる。Needham の *Visual Complex Analysis* には、反転とその幾何学的性質についての見事な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。