解答例

STEP I 2012、第 3 問

純粋数学 ・ 面積から導く不等式

> **STEP I 2012、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q3

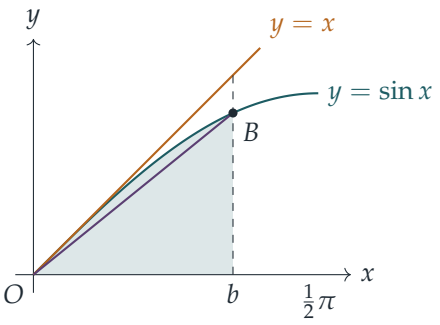
鍵となる考え方

常に同じ向きに曲がっている曲線は、その各接線（tangent）に対しては一方の側にあり、各弦（chord）に対してはもう一方の側にある。したがって、曲線の下の面積は接線の下の面積と弦の下の面積に挟まれ、しかもそれらはどちらも単なる三角形か台形（trapezium）である。それぞれの面積を正確に書き下せば、不等式は自然に得られる。本当に考えるべきことは、どの接線とどの弦を使うかを決めることだけである。

解答

小問 (i)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ において $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$ であるから、曲線 $y = \sin x$ はこの範囲で上に凸（concave）、すなわち下向きに曲がっている。原点における接線の傾きは $\cos 0 = 1$ であるから、接線は直線 $y = x$ である。O から $B = (b, \sin b)$ への弦は直線 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$ である。



上に凸であることから、O と B の間では曲線は弦より真に上にあり、$x > 0$ では O における接線より真に下にある。よって、$0 < x < b$ に対して

$$\frac{\sin b}{b}x \ < \ \sin x \ < \ x.$$

ここで、$0 \leq x \leq b$ における3つの面積を比べる。

- 曲線の下（網掛け部分）：$\displaystyle\int_0^b \sin x \, \mathrm{d}x = 1 - \cos b.$
- 接線の下：底辺 b、高さ b の直角三角形であり、面積は $\frac{1}{2}b^2$ である。
- 弦の下：底辺 b、高さ $\sin b$ の三角形であり、面積は $\frac{1}{2}b\sin b$ である。

$0 < x < b$ において曲線は2直線の真に間にある（そして3つとも連続である）から、面積は狭義の不等式を満たす。

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \ < \ 1 - \cos b \ < \ \tfrac{1}{2}b^2.$$

右側の不等式を変形すると $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$ となり、左側の不等式を変形すると $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$ となる。合わせて

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

となり、示すべきことが得られた。

小問 (ii)

$k = \ln a$ とおく。$a > 1$ より $k > 0$ であり、$a^x = \mathrm{e}^{kx}$ である。すると

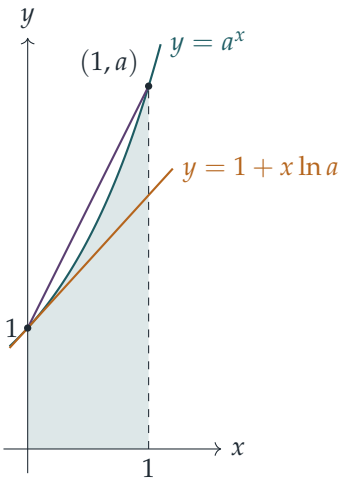
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

であるから、この曲線は下に凸（convex）、すなわち上向きに曲がっている。今度は役割が入れ替わる。曲線はその弦より真に下にあり、（接点を除いて）その接線より真に上にある。

考えてみよう どの区間で面積を比べればよいだろうか？

答えには $\ln a$ と a だけが現れ、それ以外は現れない。区間 $0 \le x \le 1$ がまさにそうなる。曲線の端点は $(0,1)$ と $(1,a)$ であり、曲線の下の面積は

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



下界（弦）。$(0,1)$ から $(1,a)$ への弦は $0 < x < 1$ で曲線より上にあり、その下の領域は幅 1、平行な 2 辺が 1 と a の台形で、面積は $\frac{1}{2}(1+a)$ である。よって

$$\frac{a-1}{\ln a} < \frac{a+1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ln a > \frac{2(a-1)}{a+1},$$

ここでは正の量 $2\ln a/(a+1)$ を両辺に掛けたので、不等号の向きは変わらない。

上界（接線）。$(0,1)$ における接線の傾きは $k = \ln a$ であるから、接線は $y = 1 + kx$ である。これは $x > 0$ で曲線より下にあり、$[0,1]$ におけるその下の面積は平行な 2 辺が 1 と $1+k$ の台形で、面積は $1 + \frac{1}{2}k$ である。よって

$$1 + \tfrac{1}{2}k < \frac{a-1}{k}.$$

$2k > 0$ を掛けると

$$2k + k^2 < 2a - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 + 2k + 1 < 2a - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (k+1)^2 < 2a - 1.$$

考えてみよう そのまま平方根をとってよいだろうか？

よい。ただし、それは両辺が正だからである。$2a - 1 > 1 > 0$ であり、$k > 0$ より $k + 1 > 0$ である。正の数については $u^2 < v^2$ から $u < v$ が従うので、$k + 1 < \sqrt{2a-1}$、

すなわち

$$\frac{2(a-1)}{a+1} < \ln a < -1 + \sqrt{2a-1},$$

となり、証明が完了する。

検算

- 小問 (i) で $b = 1$ とすると、$1 - \frac{1}{2} = 0.5$、$\cos 1 \approx 0.5403$、$1 - \frac{1}{2}\sin 1 \approx 0.5793$ である。主張どおりの大小関係になっている。
- 小問 (ii) で $a = 2$ とすると、$\frac{2}{3} \approx 0.6667$、$\ln 2 \approx 0.6931$、$\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$ である。こちらも正しい大小関係になっている。
- $a \to 1$ のとき、小問 (ii) の 3 つの式はすべて 0 に近づき、互いに挟まれて接近する。$a = 1.01$ では小数第 5 位まで一致する。これは理にかなっている。短い範囲では、滑らかな曲線はほとんど直線だからである。
- 両方の不等式の連鎖を数千個のランダムな値で確かめ、面積の公式はシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめた。

よくある間違い

- 位置関係を逆にしてしまう。正弦曲線は上に凸（接線の下、弦の上）であり、a^x は下に凸（その逆）である。これは図ではなく第 2 次導関数（second derivative）で根拠づけること。
- 不等式に $\ln a$ を掛けたり $\ln a$ で割ったりするときに、$\ln a > 0$ であることを確認し忘れる。
- $k + 1 > 0$ を確認せずに $(k+1)^2 < 2a - 1$ の平方根をとる。

STEP のその先へ

弦による評価は、ある一般原理の特別な場合である。下に凸な関数について、区間上の平均値は、中点での値と両端点での値の平均との間にある（エルミート・アダマールの不等式（Hermite–Hadamard inequality）。端点ではなく中点での接線を使うと、さらに精密な下界が得られる）。小問 (ii) の下界は、a と 1 の対数平均（logarithmic mean）$(a-1)/\ln a$ がそれらの算術平均（arithmetic mean）より小さいことを述べている。これは解析学の至るところや物理学にも現れる事実である。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、凸関数と積分の評価を丁寧に扱

っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。