解答例

STEP I 2012、第 2 問

純粋数学 • 曲線の概形と解

> **STEP I 2012、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q2

鍵となる考え方

$p(x) = 0$ の実数解（real roots）の個数を数えることは、グラフ $y = p(x)$ が x 軸と交わる点を数えること、あるいは定数を移項したうえで、固定された曲線と水平な直線との交点を数えることと同じである。したがって、この問題の核心は四次関数（quartic）のグラフの形、すなわちどこで向きを変え、そのときどれだけ高いか低いかを把握することにある。小問 (i) ではこの四次式は完全平方式であり、小問 (ii) では導関数（derivative）に関する条件によって $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が重解（repeated root）をもつ形に因数分解され、その結果、極値をとる点（turning point）はただ一つになる。

解答

小問 (i)

まず

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

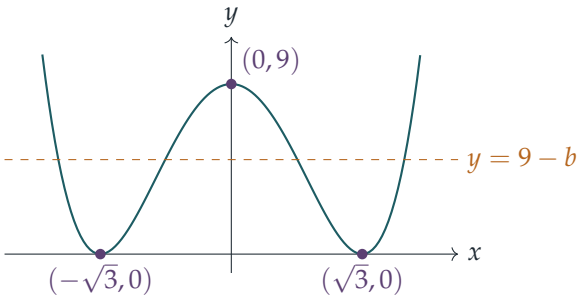
であることに注意する。よって、いたるところで $y \geq 0$ であり、$y = 0$ となるのはちょうど $x = \pm\sqrt{3}$ のときである。この曲線は偶関数（even）のグラフ（y 軸に関して対称）であり、y 軸と $(0, 9)$ で交わる。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

となり、これは $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{3}$ で 0 となる。したがって停留点（stationary point）は

$$(0, 9)\text{（極大）}, \qquad (\sqrt{3}, 0) \text{ と } (-\sqrt{3}, 0)\text{（極小）}.$$

である。$y \geq 0$ かつそこで $y = 0$ であるから、極小（minimum）であることは明らかである。また、第2次導関数（second derivative）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12$ は $x = 0$ で $-12 < 0$ となるので、この点は極大（local maximum）である。$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ である。この曲線は $x = \pm\sqrt{3}$ で x 軸に接する「W」字形である。



解の個数を調べるために、両辺に9を加える：

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

よって n は、水平な直線 $y = 9 - b$ が先ほど描いた曲線と交わる回数である。直線を上から下へ動かしながら図を読み取ると、次のようになる。

- $9 - b > 9$、すなわち $b < 0$ のとき：直線は極大点より上にあり、外側の二つの枝とだけ交わるので、$n = 2$ である。
- $9 - b = 9$、すなわち $b = 0$ のとき：直線は極大点を通り、$x = 0$ と外側の二点で交わる。実際、$x^2(x^2 - 6) = 0$ より $x = 0, \pm\sqrt{6}$ である。よって $n = 3$ である。
- $0 < 9 - b < 9$、すなわち $0 < b < 9$ のとき：直線は四つの単調な部分のそれぞれと一度ずつ交わるので、$n = 4$ である。
- $9 - b = 0$、すなわち $b = 9$ のとき：直線は二つの極小点 $x = \pm\sqrt{3}$ でのみ接するので、$n = 2$ である。
- $9 - b < 0$、すなわち $b > 9$ のとき：直線は曲線より下にあるので、$n = 0$ である。

以上をまとめると、

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$ となる値は存在しない：b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ または $b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$ が不可能であることは対称性からも分かる。x が解ならば $-x$ も解であるから、解がただ一つならそれは $x = 0$ でなければならず、このとき $b = 0$ となるが、そうすると解は三つになる。

小問 (ii)

ここでは $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

である。第 2 次導関数が 0 になるのは $x = \pm 1$ のときだけである。$x = 1$ における第 1 次導関数の値は $a - 8$、$x = -1$ における値は $a + 8$ である。よって、両者が同じ点で 0 になるのはちょうど

$$a = 8 \text{ (点} x = 1) \qquad \text{または} \qquad a = -8 \text{ (点} x = -1).$$

のときである。

$a = 8$ の場合。 このとき

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

となる。因数 $(x-1)^2$ が見つかったのは、$x = 1$ が y' と y'' の両方の解、すなわち y' の重解となるように設定したからである。

考えてみよう この曲線が実際にもつ極値をとる点はいくつか？

$(x-1)^2 \geq 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号は $x + 2$ の符号と一致する。よって y は $x < -2$ で狭義単調減少、$x > -2$ で狭義単調増加である（$x = 1$ で傾きは 0 になるが符号は変わらない。これは停留変曲点（stationary point of inflection）であって、極値をとる点ではない）。極値をとる点はただ一つで、$x = -2$ における最小値（global minimum）であり、その値は

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

である。ただ一つの極小点まで下がってから上がる曲線は、その極小値が軸より下にあれば x 軸と 2 回交わり、軸上にあれば 1 回（接する）、軸より上にあれば 1 回も交わらない。したがって、異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 2 & \text{となるのは} b < 24, \\ 1 & \text{となるのは} b = 24, \\ 0 & \text{となるのは} b > 24. \end{cases}$$

である（$b = 24$ のときの重解は直接確かめられる：$x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$ であり、この二次式の判別式（discriminant）は $16 - 24 < 0$ である）。

$a = -8$ の場合。 x を $-x$ に置き換えると $x^4 - 6x^2 - 8x + b$ は $x^4 - 6x^2 + 8x + b$ になるので、この曲線は前の曲線を y 軸に関して折り返したものである。ただ一つの極小点は今度は $x = 2$ にあり、その値は $b - 24$ である。解の個数も同じで、$b < 24$ なら 2、$b = 24$ なら 1、$b > 24$ なら 0 である。

小問 (iii)

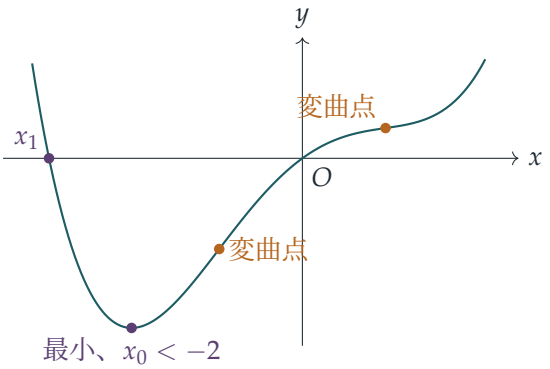
$a > 8$ として $y = x^4 - 6x^2 + ax$ を考える。

停留点。 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ は $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$ を意味する。三次関数（cubic）$g(x) = x^3 - 3x$ は極大値 $g(-1) = 2$ と極小値 $g(1) = -2$ をもち、また $g(-2) = -2$ である。$-\frac{a}{4} < -2$ であるから、高さ $-\frac{a}{4}$ の水平な直線は g の極小値より下にあり、g のグラフとちょうど 1 回、$x < -2$ となる左側の枝で交わる。よって停留点はちょうど一つで、ある $x_0 < -2$ にある。その左側では傾きが負、右側では正であるから、これは最小点である。

x 軸との交点。 $y = x(x^3 - 6x + a)$ であるから、$x = 0$ が交点の一つであり、他の交点は $h(x) = x^3 - 6x + a$ の解である。この三次関数は $x = \sqrt{2}$ で極小となり、$a > 8 > 4\sqrt{2}$ より $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$ である。よって h の実数解はただ一つであり、$h(0) = a > 0$ であるからそれは負である。実際、$h(-2) = a + 4 > 0$ であり、h は $x < -\sqrt{2}$ で増加するので、この解 x_1 は $x_1 < -2$ を満たす。曲線は x_1 と原点で軸と交わり、その間では負の値をとる。最小点はこの区間内にある。

その他の特徴。 原点における傾きは $a > 0$ である。第 2 次導関数 $12(x^2 - 1)$ は $x = \pm 1$ で符号を変えるので、$(-1, -a - 5)$ と $(1, a - 5)$ に変曲点（point of inflection）がある。そこでの傾きは $a + 8$ と $a - 8$ でいずれも正であるから、曲線はこれらの点を通過する際にも上昇し続けている。曲線は $-1 < x < 1$ で上に凸（concave down）、その外側では下に凸である。$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ である。

下図は $a = 10$ の場合であり、このとき $x_0 \approx -2.05$、最小値は約 -28、$x_1 \approx -3.05$ である。



検算

- 小問 (i) で $b = 5$ のときは解が四つになるはずである：$x^2 = 3 \pm 2$ より $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$。確かにそうなっている。

- 小問 (ii) で $b = 24$ のときは因数分解 $(x+2)^2(x^2-4x+6)$ が得られ、最小点でただ一つの（二重の）解をもつことが確認できる。
- 数値的に、0、9、24 の前後の多くの b の値について四次方程式のすべての複素数解を求め、異なる実数解の個数を数えたところ、すべての個数が一致した。8 から 200 までの無作為な a について、(iii) の曲線は常に停留点を一つ、軸との交点を二つもち、$x_1 < x_0 < -2$ であった。$a = 10$ のとき、$x_0 \approx -2.054$、$y(x_0) \approx -28.05$ である。

よくある間違い

- （$b = 9$ のときの）$x = \pm\sqrt{3}$ における重解を四つの解と数えてしまう。問題が求めているのは**異なる** x の値の個数である。
- 小問 (ii) で $y' = y'' = 0$ となる点を極値をとる点として扱ってしまう。そこでは y' が平方の因数をもつので符号が変わらず、停留変曲点となる。
- $a = -8$ を忘れる。$y'' = 0$ には解が二つあり、それぞれが a の値を一つずつ与える。

STEP のその先へ

b が 0、9、24 を通過するときに実数解の個数が跳ぶように変化する様子は、**分岐**（bifurcation）の小さな例である。答えが変わるのは、水平な直線が停留値を通過するときだけである。小問 (ii) の特別な場合 $y' = y'' = 0$ は、二つの停留点が合体して消滅する点であり、これは最も単純な「カタストロフィー」（catastrophe）である折り目（fold）にあたる。そしてこれこそが、$a > 8$ となると (iii) の四次関数が極値をとる点を一つしかもたない理由である。同じ推論を中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性（monotonicity）によって厳密にしたものが、実解析（real analysis）の出発点である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それが丁寧に展開される様子を見るのに適した一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。