解答例

# STEP I 2012、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2012、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q12

## 鍵となる考え方

すべては消火器が何年目に故障するかにかかっている。そこでまず確率密度関数（density）を累積分布関数（cumulative distribution function）に直し、故障が 1 年目、2 年目、3 年目に起こる確率を読み取る。何年目かがわかれば、検査は独立な（independent）合格が続いたあとに不合格が 1 回来るという列にすぎない。最後の部分は条件付き確率（conditional probability）であり、「18 か月時点で故障している」という事象もまた、$T$ がどの区間に入るかについての主張である。

## 解答

### $T$ の分布

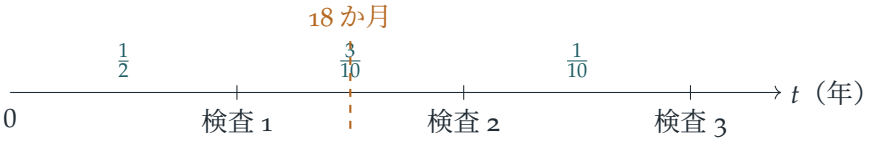
$t \geq 0$ に対して、$u = 1 + s^2$ と置換すると（このとき $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$）、

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

よって $F(1) = \frac{1}{2}$、$F(2) = \frac{4}{5}$、$F(3) = \frac{9}{10}$ であり、

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

$T$ は連続型なので、故障がちょうど検査日に起こる確率は 0 である。したがって、端点で $<$ と $\leq$ のどちらを使うかを気にする必要はない。



### 製造からちょうど 3 年後に廃棄される確率

製造から 3 年後の検査で消火器が廃棄されるという事象を $D$ とする。これが起こるためには、3 回目の検査までに故障していなければならず（つまり $T < 3$）、それまでに故障した状態で受ける検査にはすべて合格し、3 回目の検査で不合格にならなければならない。故障していない消火器は必ず合格するので、関係するのは時刻 $T$ 以降の検査だけであり、それらは独立で、不合格になる確率は $p$ である。

- $0 < T < 1$ のとき：検査 1、2、3 のすべてで故障しているので、合格、合格、不合格とならなければならない。確率は $(1-p)^2 p$ である。
- $1 < T < 2$ のとき：検査 1 には自動的に合格し、その後検査 2 に合格して検査 3 で不合格にならなければならない。確率は $(1-p)p$ である。
- $2 < T < 3$ のとき：検査 1 と 2 には自動的に合格し、検査 3 で不合格にならなければならない。確率は $p$ である。

$T > 3$ ならば検査 3 の時点では故障していないので、そのとき廃棄されることはない。全確率の法則（law of total probability）により、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

### 3 年後に廃棄されたという条件のもとで、18 か月時点で故障していた確率

製造から 18 か月後に消火器が故障していたという事象、すなわち $T < \frac{3}{2}$ を $E$ とする。求めるのは

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

である。

> **考えてみよう** 区間 $(0, \frac{3}{2})$ は検査日をまたいでいる。どのように分ければよいか？

検査にとって重要なのは故障が何年目に起こるかなので、$E$ を $0 < T < 1$ と $1 < T < \frac{3}{2}$ に分ける。$F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$ であるから、

$$\mathrm{P}\big(1 < T < \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

$0 < T < 1$ のもとでは、$D$ の確率は先ほどと同じく $(1-p)^2 p$ である。$1 < T < \frac{3}{2}$ のもとでも故障は 2 年目に起こっているので、$D$ の確率は $(1-p)p$ である。したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}. \end{aligned}$$

これを $\mathrm{P}(D)$ で割ると（$5p^2 - 13p + 9$ の判別式（discriminant）は $169 - 180 < 0$ なので常に正であり、よって $0 < p \leq 1$ では正である）、因数 $p$ が約分されて

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

## 検算

- $p = 1$ のとき、故障した消火器はすべて故障後最初の検査で廃棄されるので、3 年目に廃棄されたということは故障が $(2,3)$ で起こったことを意味する。よって $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{10}$ かつ $\mathrm{P}(E \mid D) = 0$ であり、どちらの式とも一致する。
- $p \to 0$ のとき $\mathrm{P}(E \mid D) \to \dfrac{5 \cdot 18}{13 \cdot 9} = \dfrac{10}{13}$ となり、これは $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2} \mid T < 3) = \dfrac{9/13}{9/10}$ に等しい。検査がほとんど故障を検出しないとき、廃棄されたという事実は $T < 3$ 以上のことをほとんど教えてくれないのである。
- $p = 0.4$ として $10^6$ 個の消火器をシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(D) \approx 0.1838$（厳密値 0.184）、$\mathrm{P}(E \mid D) \approx 0.642$（厳密値 $\frac{192}{299} \approx 0.642$）が得られた。

## よくある間違い

- 故障した消火器は、3 回目の検査で不合格になる前に、それ以前の検査に**合格**しなければならないことを忘れる。
- 最後の部分で $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2}) = \frac{9}{13}$ をひとまとまりとして使ってしまう。1 年目の故障と 2 年目前半の故障とでは、受ける検査の回数が異なる。

## STEP のその先へ

ここで $T$ は連続的な寿命であるが、私たちはそれを離散的で不完全な検査を通してしか観測できない。これは生存時間解析（survival analysis）や信頼性理論（reliability theory）における**区間打ち切り**（interval-censored）データの設定であり、最後の部分は小さなベイズ更新（Bayesian update）になっている。すなわち、$T$ の事前分布（prior distribution）が、観測された不合格に照らして改訂されるのである。Grimmett

と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続分布とこの種の条件付けを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。