解答例

STEP I 2012、第 11 問

力学 ・ 滑車と摩擦

> **STEP I 2012、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q11

鍵となる考え方

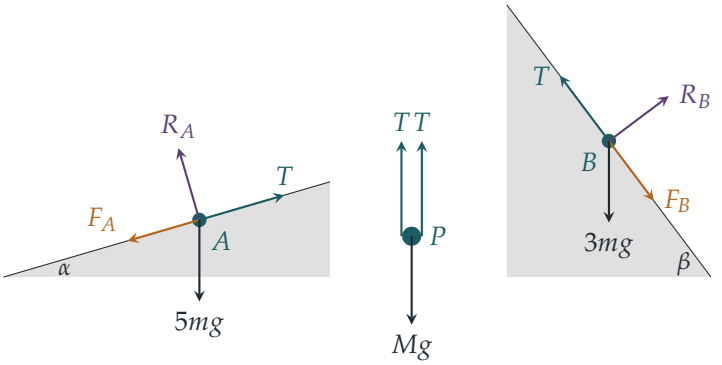
滑車はすべてなめらかで糸は軽いので、張力（tension）は糸のどこでも等しい。したがって、各質点について張力と摩擦力（friction）を結びつける式が一つずつ得られ、滑車 P から三つ目の式が得られる。角は $7, 24, 25$ および $3, 4, 5$ の三角形から選ばれているので、正弦・余弦はすべて正確な分数になる。運動している場合には、もう一つの材料が必要である。すなわち、糸の長さが一定であることによって、A、B、P の加速度（acceleration）がどのように結びついているかである。

解答

A、B を質点とし、糸は軽く伸び縮みしない（inextensible）ものとしてモデル化する。滑車 Q と R はなめらかで軽く、固定されており、P はなめらかで質量 M をもつ。$\alpha = \arctan\frac{7}{24}$、$\beta = \arctan\frac{4}{3}$ とおく。辺の長さが $7, 24, 25$ および $3, 4, 5$ の直角三角形から、

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

張力を T とする。滑車はすべてなめらかなので、T は糸のどの部分でも同じである。



どちらの小問でも、質点は斜面を**上向きに**動き出す直前にあるか、上向きに動いているので、図のように摩擦力はそれぞれの斜面に沿って**下向きに**はたらく。斜面に垂直な方向に力を分解すると、

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

小問 (i)

両方の質点がすべり出す直前にあるので、摩擦力は最大摩擦力（limiting friction）であり、$F_A = \mu R_A$、$F_B = \mu R_B$ である。各斜面に沿って力を分解すると（つり合い）、

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

両者を等しいとおくと $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$ となるので、

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

であり、このとき $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$ である。

滑車 P は、鉛直な二本の糸に上向きに引かれ、重力に下向きに引かれてつり合っているので、

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

いま $M = 9m$ であり、これはちょうど限界のつり合いで支えられる $6m$ より重いので、P は下降し、両方の質点を斜面に沿って上へ引きずると予想される。

? **考えてみよう** 三つの加速度はどのように関係しているか？

A と B の斜面に沿って上向きの加速度をそれぞれ a、b とし、P の下向きの加速度を p とする。糸の長さ $AQ+QP+PR+RB$ は一定である。A が斜面に沿って距離 x だけ上がり、B が斜面に沿って距離 y だけ上がると、AQ と RB はそれぞれ x、y だけ短くなる。また P が z だけ下がると、QP と PR はそれぞれ z だけ長くなる。よって常に $2z=x+y$ が成り立ち、これを二回微分すると

$$2p=a+b.$$

$\mu=\frac{1}{3}$ のとき、上向きにすべっている間の摩擦力は、A では $\frac{1}{3}R_A=\frac{8}{5}mg$、$B$ では $\frac{1}{3}R_B=\frac{3}{5}mg$ である。各斜面に沿った方向と、P については鉛直方向に、ニュートン（Newton）の運動の第二法則を適用すると、

$$\begin{aligned} A:&\quad T-\tfrac{7}{5}mg-\tfrac{8}{5}mg=5ma, && \text{よって} T-3mg=5ma,\\ B:&\quad T-\tfrac{12}{5}mg-\tfrac{3}{5}mg=3mb, && \text{よって} T-3mg=3mb,\\ P:&\quad 9mg-2T=9mp. \end{aligned}$$

$T=3mg+X$ とおく。すると $a=\dfrac{X}{5m}$、$b=\dfrac{X}{3m}$ であり、糸の条件から

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{4X}{15m}.$$

これを P の式に代入すると、

$$3mg-2X=\frac{12X}{5}\quad\Longrightarrow\quad X=\frac{15mg}{22}.$$

したがって

$a=\dfrac{3g}{22}$（斜面に沿って上向き），　$b=\dfrac{5g}{22}$（斜面に沿って上向き），　$p=\dfrac{2g}{11}$（鉛直下向き），

であり、張力は $T=\frac{81}{22}mg$ である。

考えてみよう 一方が静止したままではなく、両方の質点が本当に上向きに動くことは、どうしてわかるのか？

上の式から、質点が斜面を上向きにすべるのは $T>3mg$ のときに限り、静止したままである（あるいは下向きにすべろうとする）のは $T\le 3mg$ のときに限る。値 $3mg$ は両方の質点で同じなので、両方とも上向きに動くか、どちらも動かないかのいずれかである。どちらも上向きに動かないとすると $a+b\le 0$ なので $p\le 0$ となる。ところが $T\le 3mg$ からは $9mg-2T\ge 3mg>0$ となり、$p>0$ でなければならない。これは矛盾であるから、両方とも上向きに動き、（$a,b>0$ である）上の解は矛盾なく成り立つ。

検算

- 小問 (i) で、$\mu = \frac{1}{3}$ を両方の質点の式に代入すると、同じ張力 $3mg$ が得られる。
- 小問 (ii) で、$2p = \frac{4g}{11} = \frac{3g}{22} + \frac{5g}{22} = a + b$ であり、糸の条件を満たしている。また $T = \frac{81}{22}mg \approx 3.68mg$ は、$3mg$（すべり出しの境目）と $4.5mg$（P の加速度が 0 になる値）の間にある。
- 三つの運動方程式を時間刻みで数値シミュレーションすると、糸の長さは丸め誤差の範囲で一定に保たれ、$p \approx 0.182g$ となる。
- もし M が再び $6m$ であれば、同じ方法で $X = 0$ となり、加速度はすべて 0 になって、小問 (i) と一致する。

よくある間違い

- $a = b = p$ としてしまうこと。滑車 P の運動は二本の糸が分け合っているので、P は二つの質点の動きを合わせた速さの半分で動く。
- 摩擦力を斜面に沿って上向きにとってしまうこと。両方の質点は**上向きに**引かれているので、摩擦力はそれを妨げる向き、すなわち斜面に沿って下向きにはたらく。
- P にかかる二本の糸の両方に張力 T がはたらき、P にかかる上向きの力が $2T$ であることを忘れること。

STEP のその先へ

関係式 $2p = a + b$ は**拘束条件**（constraint）であり、独立な座標の数を三つから二つに減らす。大学の一年次か二年次で学ぶラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、拘束条件を自動的に満たす座標を選ぶので、張力を求める必要はまったくない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、拘束条件の式を通じて丁寧に扱われた滑車の系が数多く載っており、その見方への良い橋渡しとなる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。