解答例

STEP I 2012、第 10 問

力学 ・ 自由落下と音

> **STEP I 2012、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q10

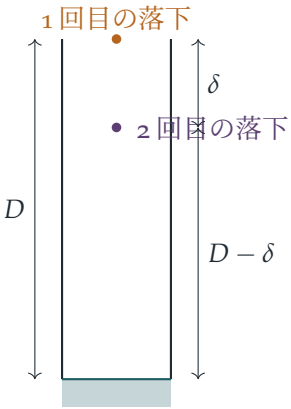
鍵となる考え方

測定される時間はそれぞれ二つの部分からなる。石が静止状態から自由落下（free fall）する時間と、着水音が一定の速さで井戸を上ってくる時間である。両方の時間を書き下して引き算すれば、ただちに t が得られる。「これを用いて（hence）」の部分では、二つの平方根がそれぞれ二つの落下時間を表している。その差はわかっており、2 乗の差は簡単な形をしているので、因数分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ によって和も得られ、そこから各々が個別に求まる。

解答

t の式

石を、重力のみを受けて（空気抵抗（air resistance）は無視して）静止状態から落下する質点（particle）としてモデル化し、音は井戸の中をまっすぐ上向きに一定の速さ u で伝わると仮定する。



静止状態から落とした石は、時間 τ の間に距離 h だけ落下し、$h = \frac{1}{2}g\tau^2$ が成り立つので、$\tau = \sqrt{2h/g}$ である。その後、音は同じ距離 h を上って私のところまで戻ってくるので、h/u の時間がかかる。したがって、水面からの高さ h の位置から石を落としたときに私が測定する時間は

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

である。井戸の上端からは $h = D$ である。下に降りた後は、私（そして石の出発点）は水面から高さ $D - \delta$ の位置にあり、音はそこまで届けばよい。よって

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

D の式

二つの落下時間を $a = \sqrt{2D/g}$、$b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$ とおく。いま示した結果から

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

である。$\delta > 0$ より $a > b$ なので $\beta > 0$ であり、特に $\beta \neq 0$ である。また

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

である。

? **考えてみよう** $a - b$ はわかっている。では a 単独はどうすれば求められるか。

因数分解すると $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$ であり、β は正なので β で割ってよい。よって

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

これを $a - b = \beta$ に加えて 2 で割ると

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

最後に、$a = \sqrt{2D/g}$ は $D = \tfrac{1}{2}ga^2$ を意味するので

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

となり、題意は示された。（つまり T は、石が上端から井戸の深さ全体を落下するのにかかる時間にほかならない。）

数値の場合

$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$、$\delta = 10\,\mathrm{m}$ のとき

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},\\
T &= \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},\\
D &= \tfrac{1}{2}\cdot 10 \cdot \left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

である。したがって、井戸の深さはおよそ 185 m である。

検算

- $D = 26645/144$ を $\delta = 10$ として t の式に代入し直す。落下時間は $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$ と $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$ であり、その差は $1/6\,\mathrm{s}$ である。これに $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$ を加えると、ちょうど $t = 0.2\,\mathrm{s}$ となる。
- 音が瞬時に伝わる（$u \to \infty$）ならば $\beta = t$ となり、当然そうあるべきである。このときは落下時間だけが問題となる。
- 落下する石の運動を数値的に時間刻みで計算し、音の遅れを加えると、t の式が $10^{-4}\,\mathrm{s}$ の精度で再現される。また、逆算 $D = \tfrac{1}{2}gT^2$ により、10^4 個のランダムな場合で D が復元される。

よくある間違い

- 下に降りた後は音が $D-\delta$ しか伝わらないことを忘れ、δ/u の項を落としてしまう。
- 方程式 $a-b=\beta$ をそのまま 2 乗しようとする。これは煩雑な計算につながるが、$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ を使えば 1 行で $a+b$ が得られる。
- 音をまったく無視してしまう。$\beta=t=0.2$ とすると、同じ方法で $T=5.1\,\mathrm{s}$、$D\approx 130\,\mathrm{m}$ となり、大きく外れた答えになる。

STEP のその先へ

ここでの方法は**差分測定**（*differential measurement*）である。一回の計時を信頼するのではなく、既知の量だけ異なる二つの実験を比較し、未知量を打ち消し合わせるのである。最後の間違いの例は、データの小さな変化に対して答えがいかに敏感であるかを示している。t は二つの大きな時間の小さな差だからである。物理学者や工学者はこれを誤差伝播（error propagation）や条件数（condition number）によって定量化し、大学 1 年次の実験手法や数値解析（numerical analysis）で学ぶ。単純な運動を注意深くモデル化することについてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。